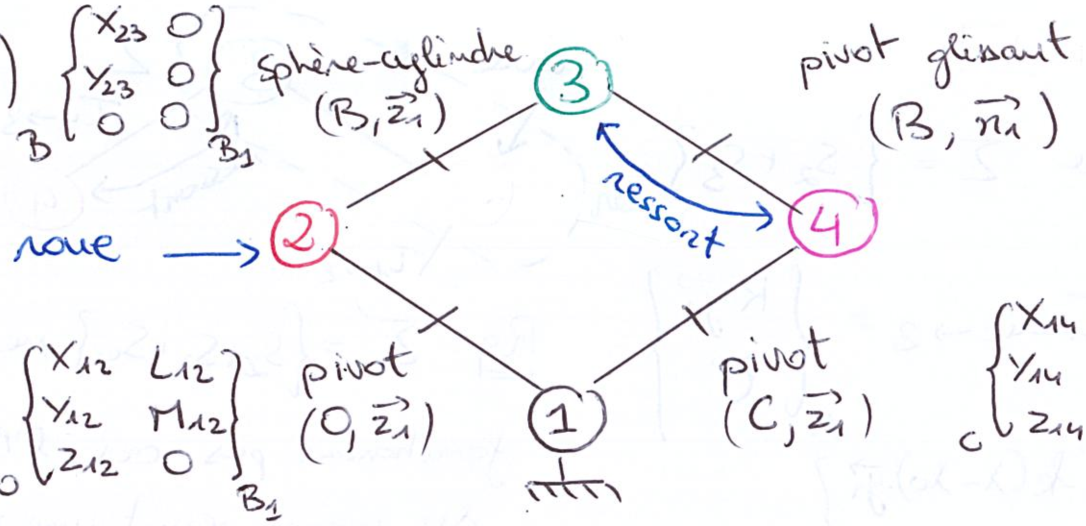
TD2 : Équilibre des mécanismes

Exercice 1 : Suspension de VTT (Piste Verte)

Q1) $\left\{\begin{matrix} X_{23} & 0 \\ Y_{23} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\}_{B,\,B_1}$ $\qquad$ $\left\{\begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_{43} & M_{43} \\ Z_{43} & N_{43} \end{matrix}\right\}_{B,\,B_1}$



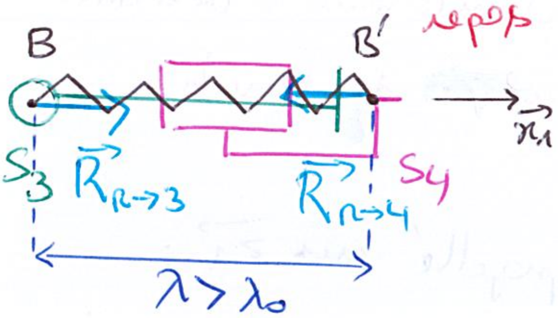
$\left\{\begin{matrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{matrix}\right\}_{O,\,B_1}$ $\qquad$ $\left\{\begin{matrix} X_{14} & L_{14} \\ Y_{14} & M_{14} \\ Z_{14} & 0 \end{matrix}\right\}_{C,\,B_1}$

Q2) **Méthodologie** : Détermination du sens de l'AM d'un ressort sur un solide S

↳ Tout simplement on l'imagine tel que $\lambda - \lambda_0 > 0$

⟹ il tire sur les solides auxquels il est attaché pour revenir à sa position de repos ⟶ cela permet de définir le signe de $\vec{R}_{ressort \to S}$ au vu du paramétrage !

Cas du VTT :



On a donc : $\begin{cases} \vec{R}_{ressort \to 3} = k(\lambda - \lambda_0)\vec{x_1} \\ \vec{R}_{ressort \to 4} = -k(\lambda - \lambda_0)\vec{x_1} \end{cases}$

et les torseurs d'AM associés : $\mathcal{T}_{ressort \to 3} = \left\{\begin{matrix} \vec{R}_{ressort \to 3} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_B$ glisseur d'axe central (BB')

$\mathcal{T}_{ressort \to 4} = \left\{\begin{matrix} \vec{R}_{ressort \to 4} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_B$

Q3) On veut lier la réactivité $T_{roue \to 2}$ à l'AM du ressort $T_{ressort \to 3}$ $\Rightarrow$ il faut donc isoler un système matériel Σ dont la frontière "coupe" ces AM !

↳ On isole $\Sigma = \{S_2 + S_3\}$

BAME : $T_{roue \to 2} = \left\{ \begin{matrix} R\vec{y_1} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_A$

Rq : $\Sigma' = \{S_2 + S_3 + S_4\}$ ne fonctionne pas car l'AM du ressort serait une AM intérieure $\Rightarrow$ n'apparaît pas dans le PFS !

$T_{ressort \to 3} = \left\{ \begin{matrix} k(\lambda - \lambda_0)\vec{x_1} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_B$

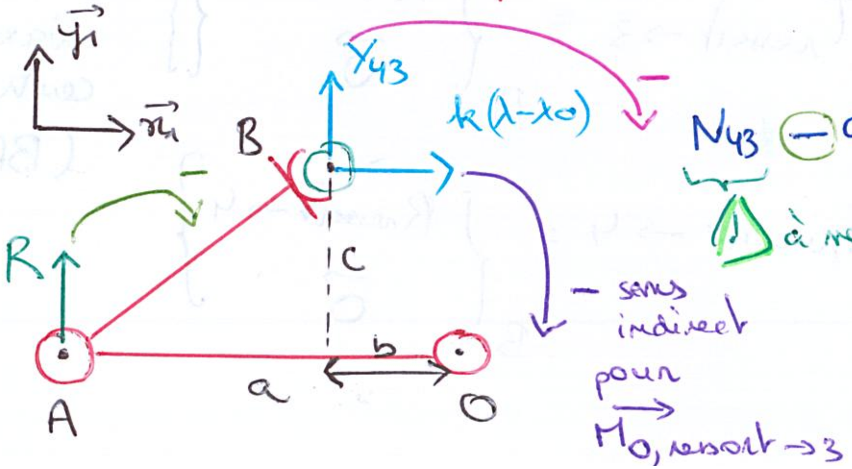
$T_{1\to2} = \left\{ \begin{matrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{matrix} \right\}_{O\,B_1}$ et $T_{4\to3} = \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ Y_{43} & M_{43} \\ Z_{43} & N_{43} \end{matrix} \right\}_{B\,B_1}$

↳ 5 inconnues ↳ 4 inconnues

Q4) On veut minimiser le nombre d'inconnues intermédiaires tout en reliant $\left\{ \begin{matrix} k(\lambda-\lambda_0)\vec{x_1} \\ R\vec{y_1} \end{matrix} \right.$ inconnues d'intérêts

↳ On applique le TMS en O projeté sur $\vec{z_1}$:

↳ permet éviter toutes les inconnues de $T_{1\to2}$ ainsi que M_{43} (selon $\vec{y_1}$ moment) et Z_{43} (résultante selon $\vec{z_1}$)



$N_{43} - aR - bY_{43} - ck(\lambda - \lambda_0) = 0$

⚠ à ne pas oublier le + évident

Q5) On isole $\{S_3\}$: BAME : $\mathcal{T}_{ressort \to 3}$

$\mathcal{T}_{2\to 3}$ et $\mathcal{T}_{4\to 3}$

↳ tous les torseurs déjà au point B ⇒ pratique car le PFS est immédiat

↳ TRS en projection selon $\vec{z_1}$:

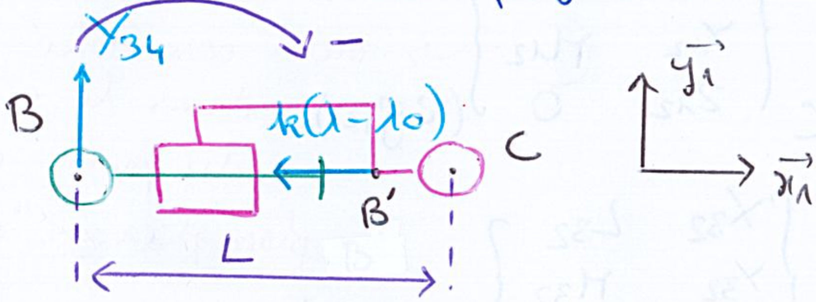
$$Z_{43} = 0$$

↳ TMS en B en projection sur $\vec{z_1}$: $N_{43} = 0$

Q6) On isole $\{S_4\}$: BAME : $\mathcal{T}_{ressort \to 4}$

$\mathcal{T}_{1\to 4}$ et $\mathcal{T}_{3\to 4}$

↳ TMS en C en projection sur $\vec{z_1}$: (afin éviter les inconnues de la liaison pivot)



$$\vec{M}_{C,3\to 4} = \underbrace{\vec{M}_{B,3\to 4}}_{\vec{0} \text{ car } N_{34} = -N_{43} = 0} - L Y_{34} \vec{z_1}$$

$$\Rightarrow L Y_{34} = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_{43} = -Y_{34} = 0$$

Q8) Au final, en réinjectant ses résultats dans l'expression obtenue à la Q4 :

$$-aR - ck(\lambda - \lambda_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow R = \frac{ck(\lambda_0 - \lambda)}{a}$$

Q9) AN pour le cas limite

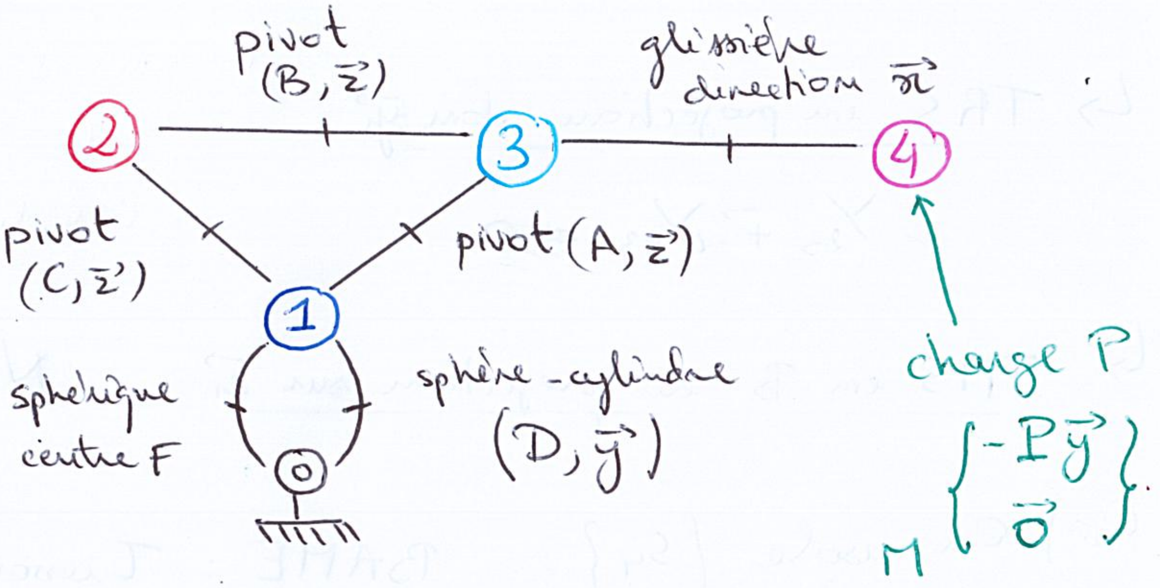
$\lambda_0 - \lambda_{min} = 38$ mm

$\Rightarrow R \approx 780$ N < 800 N OK

Exercice 2 : Potence à tirant (Piste bleue)

P1)

↳ Graphe de liaisons de la potence



P2)

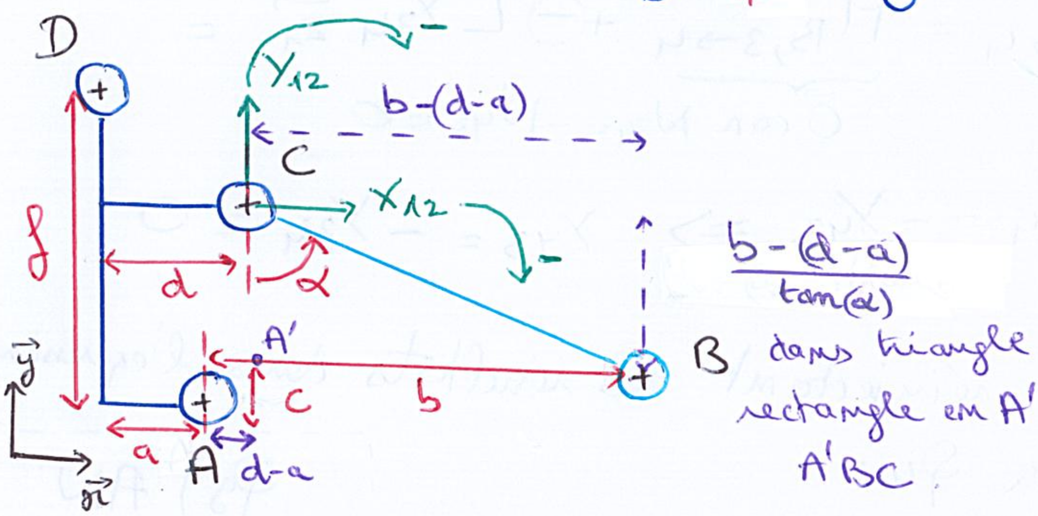
On isole le tirant {2} : ↳ Hypothèse clé : problème plan (F, $\vec{x}$, $\vec{y}$)

BAME :

$$\mathcal{T}_{1\to 2} = {}_C\begin{Bmatrix} X_{12} & * \\ Y_{12} & * \\ * & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

→ non considéré dans le cas du problème plan " $* \Leftrightarrow 0$ "

$$\mathcal{T}_{3\to 2} = {}_B\begin{Bmatrix} X_{32} & * \\ Y_{32} & * \\ * & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$



↳ TRS :

$/\vec{x}$: $X_{12} + X_{32} = 0$

$/\vec{y}$: $Y_{12} + Y_{32} = 0$

↳ TMS en B : $/\vec{z}$: $0 = -[b-(d-a)]Y_{12} - \frac{b-(d-a)}{\tan(\alpha)} X_{12}$

Conclusion : $X_{12} = -X_{32}$, $Y_{12} = -Y_{32}$ et $X_{12} = -\tan(\alpha) Y_{12}$ (*)

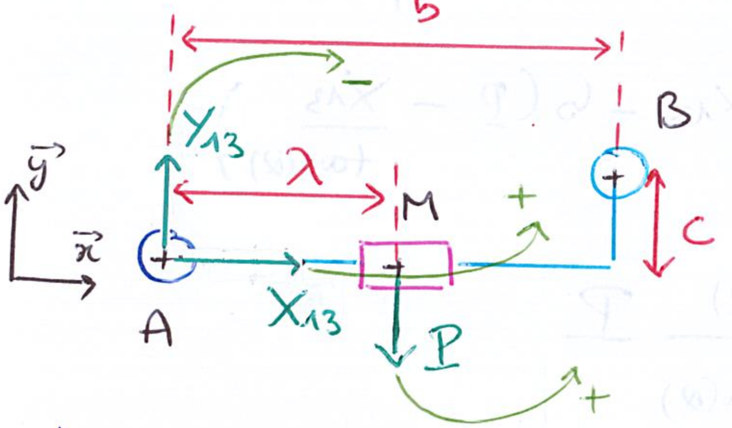
Q3) On isole le système matériel $\{3+4\}$:

BAME : $\mathcal{T}_{P\rightarrow 4} = \left\{ \begin{matrix} -P\vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_M$

$\mathcal{T}_{1\rightarrow 3} = \left\{ \begin{matrix} X_{13} & * \\ Y_{13} & * \\ * & 0 \end{matrix} \right\}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$

Th actions réciproques

$\mathcal{T}_{2\rightarrow 3} = \left\{ \begin{matrix} X_{23} & * \\ Y_{23} & * \\ * & 0 \end{matrix} \right\}_{B\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = \left\{ \begin{matrix} -X_{32} & * \\ -Y_{32} & * \\ * & 0 \end{matrix} \right\}_{B\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$



↳ TRS :

$/\vec{x}$: $X_{13} + X_{23} = 0$

$/\vec{y}$: $Y_{13} - P + Y_{23} = 0$

↳ TMS en B : $/\vec{z}$: $(b-\lambda)P + cX_{13} - bY_{13} = 0$

Rq : Comme le but est ici de déterminer toutes les AM, on ne cherche pas forcément à éviter les inconnues de liaisons ⇒ on applique le TMS en n'importe quel point.

Conclusion : $X_{13} = X_{32}$, $Y_{13} - P - Y_{32} = 0$

et $(b-\lambda)P + cX_{13} - bY_{13} = 0$ (**)

Q4) Résolution du système (*) et (**) de 6 éq scalaires :

↳ On cherche $X_{13} = f(\lambda)$; $Y_{13} = g(\lambda)$ et $Y_{32} = h(x)$

$$\begin{cases} X_{12} = -X_{32} & (1) \\ Y_{12} = -Y_{32} & (2) \\ X_{13} = X_{32} & (3) \\ X_{12} = -\tan(\alpha)\, Y_{12} & (4) \\ Y_{13} - P - Y_{32} = 0 & (5) \\ (b-\lambda)P + cX_{13} - bY_{13} = 0 & (6) \end{cases}$$

↳ Cherchons X_{13} :

$$\underset{(6)\text{ et }(5)}{\Longrightarrow} 0 = (b-\lambda)P + cX_{13} - b(P + Y_{32})$$

On $Y_{32} \underset{(2)}{=} -Y_{12} \overset{(4)}{=} \frac{X_{12}}{\tan(\alpha)}$

$$\underset{(1)}{\iff} Y_{32} = -\frac{X_{32}}{\tan(\alpha)} \overset{(3)}{=} -\frac{X_{13}}{\tan(\alpha)}$$

Finalement, en réinjectant dans l'équation précédente

$$0 = (b-\lambda)P + cX_{13} - b\left(P - \frac{X_{13}}{\tan(\alpha)}\right)$$

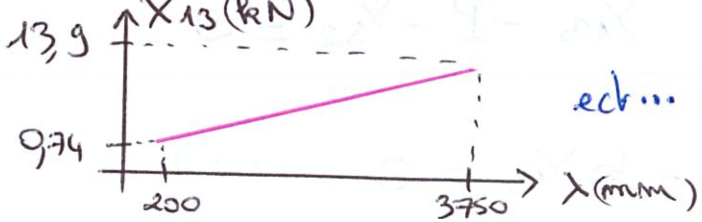
$$\iff \boxed{X_{13} = \frac{\lambda \tan(\alpha)}{b + c\tan(\alpha)} P}$$

Puis, $\boxed{Y_{32} = -\frac{\lambda P}{b + c\tan(\alpha)}}$ et $\boxed{Y_{13} \overset{(5)}{=} P - \frac{\lambda P}{b + c\tan(\alpha)}}$

AN : (pour $P = P_{max} = \overbrace{500 \underset{10\,N}{\underline{daN}}}^{=5\,kN}$)

$X_{13} = \overset{kN/m}{3,7}\,\lambda$, $Y_{32} = -\overset{kN/m}{1,1}\,\lambda$

et $Y_{13} = 5 - \underset{kN/m}{1,1}\,\lambda$ en kN

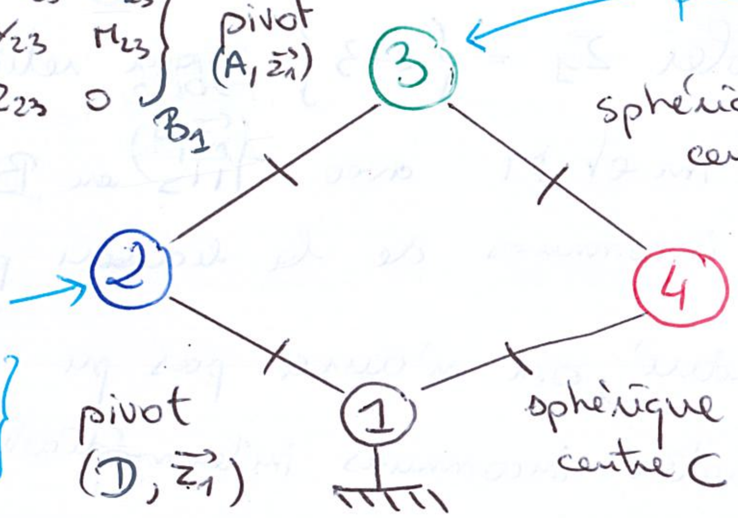


ect... ⟹ On connait donc les efforts max

↳ on pourrait donc dimensionner les structures des liaisons !

Exercice 3 : Pèse-lettre mécanique (Piste rouge)

P1)



$\left\{\begin{matrix} X_{23} & L_{23} \\ Y_{23} & M_{23} \\ Z_{23} & 0 \end{matrix}\right\}_{A, B_1}$ pivot $(A, \vec{z_1})$

pesanteur $\left\{\begin{matrix} -mg\,\vec{y_1} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_K$

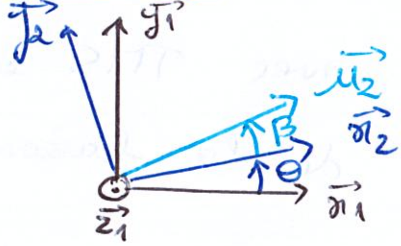
sphérique centre B $\left\{\begin{matrix} X_{43} & 0 \\ Y_{43} & 0 \\ Z_{43} & 0 \end{matrix}\right\}_{B, B_1}$

pesanteur $\left\{\begin{matrix} -Mg\,\vec{y_1} \\ \vec{0} \end{matrix}\right\}_G$

$\left\{\begin{matrix} X_{14} & 0 \\ Y_{14} & 0 \\ Z_{14} & 0 \end{matrix}\right\}_{C, \underbrace{(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})}_{B_1}}$

$\left\{\begin{matrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{matrix}\right\}_{B, B_1}$

↳ paramétrage :



P2) Paramètres connus :

M

Inconnues du problème :

m et toutes les inconnues de liaison

$\Longrightarrow$ 17 inconnues

Isolements possibles : $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{2+3\}$, $\{3+4\}$ et $\{2+3+4\}$

↳ tous les systèmes matériels qui n'incluent pas le bâti !

pas d'ajout d'info par rapport aux autres

$\Longrightarrow$ 3 équilibres distincts à étudier

En effet, si on a déjà isolé $\{2\}$ et $\{3\}$, les éq issues du PFS pour $\{2+3\}$ sont CL des précédentes !

soit $3 \times 6 = 18$ équations

$\Longrightarrow$ On peut, a priori, résoudre afin de déterminer les 17 inconnues

si rang du système de 18 éq ≥ 17

Q3) On veut trouver : $m = f(M, \theta, \beta, a, b)$:

↳ on propose d'isoler $\Sigma_1 = \{2+3\}$ pour relier directement m et M avec TMS en D sur $\vec{z_1}$ pour éviter inconnues de la liaison pivot $\mathcal{L}_{1/2}$

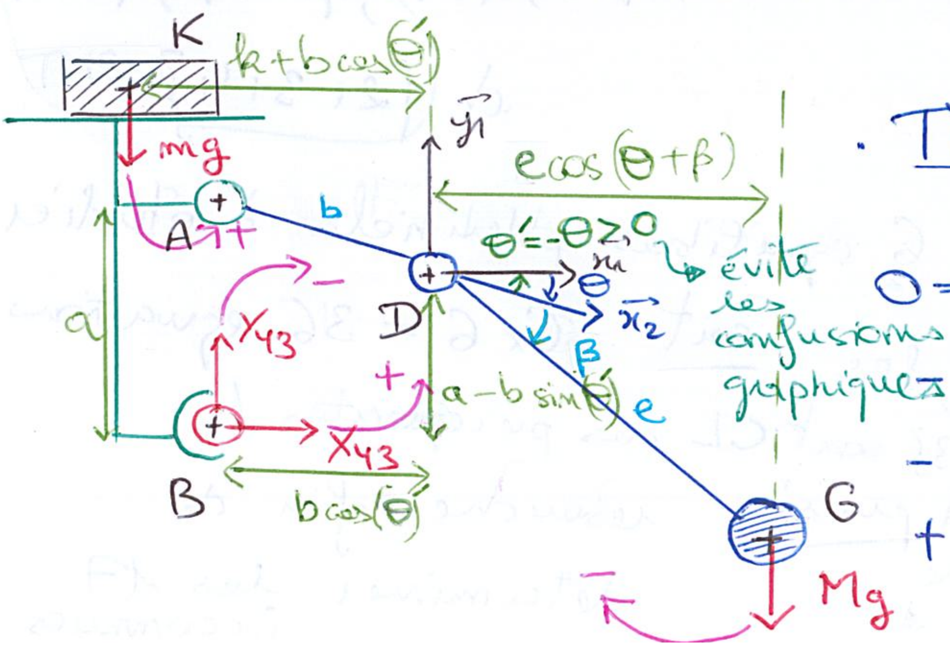
↳ à priori, on n'aura pas pu éviter inconnues intermédiaires X_{43} et Y_{43}

↳ on propose alors d'isoler $\Sigma_2 = \{3\}$ pour les relier à m avec TMS en A selon $\vec{z_1}$ pour éviter inconnues de la liaison pivot $\mathcal{L}_{2/3}$

↳ si nécessaire on peut finir par isoler $\Sigma_3 = \{4\}$ et TMS en C selon $\vec{z_1}$ permet de relier X_{43} à Y_{43}.

↳ Isolements :

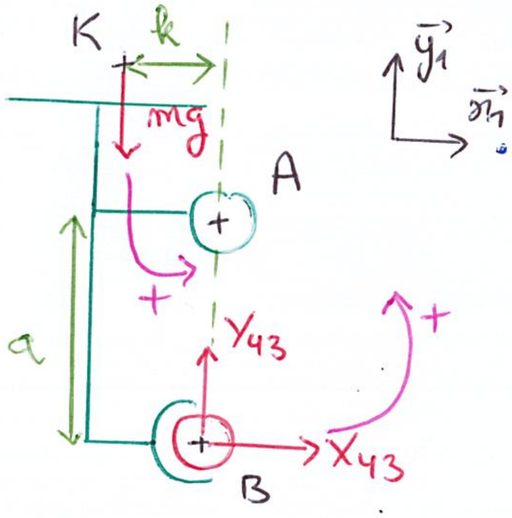
- On isole Σ_1, BAME : $\mathcal{T}_{p\to 2}$, $\mathcal{T}_{p\to 3}$, $\mathcal{T}_{1\to 2}$ et $\mathcal{T}_{4\to 3}$



- TMS en D projeté sur $\vec{z_1}$:

$$0 = (k+b\cos(\theta))mg - e\cos(\theta+\beta)Mg - b\cos(\theta)Y_{43} + (a+b\sin(\theta))X_{43} \quad (*)$$

- On isole Σ_2, <u>BAME</u> : $\tau_{P\to 3}$, $\tau_{2\to 3}$ et $\tau_{4\to 3}$



- <u>TMS en A projeté sur $\vec{z_1}$</u> :

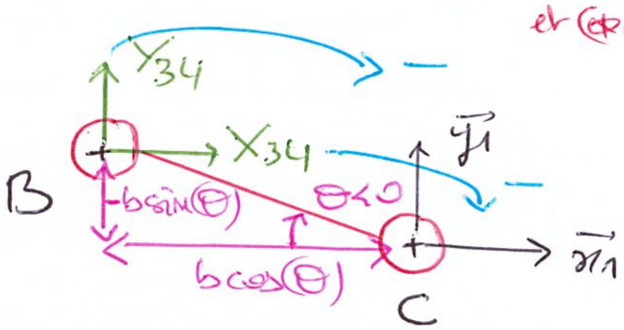
$$mgk + aX_{43} = 0 \quad (**)$$

<u>Rq</u> : Avec (*) et (**) on a donc 2 éq pour 3 inconnues (m, X_{43}, Y_{43}).
$\Rightarrow$ il en manque une non redondante avec (*) et (**)

- On isole Σ_3,

<u>BAME</u> : $\tau_{3\to 4} = -\tau_{4\to 3}$ (Th. actions réciproques)

$\tau_{1\to 4}$



- <u>TMS en C projeté sur $\vec{z_1}$</u> :

$$-b\cos(\theta)Y_{34} + b\sin(\theta)X_{34} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b\cos(\theta)Y_{43} - b\sin(\theta)X_{43} = 0 \quad (***)$$

↳ <u>Résolution du système d'équations (*), (**) et (***)</u> :

$$(**) \Leftrightarrow X_{43} = -\frac{mgk}{a}$$

$$(***) \Leftrightarrow Y_{43} = \tan(\theta)X_{43} = -\tan(\theta)\frac{mgk}{a}$$

$$(*) \Leftrightarrow 0 = (\cancel{k} + b\cos(\theta))mg - e\cos(\theta+\beta)Mg$$
$$+ b\cancel{\sin(\theta)}\frac{mgk}{a} - (\cancel{a} + \cancel{b\sin(\theta)})\frac{mgk}{a}$$

$$\Longrightarrow \boxed{m = \frac{e}{b}\frac{\cos(\theta+\beta)}{\cos(\theta)}M}$$

<u>Rq</u> : la position "k" de la masse à peser sur le plateau n'a pas d'importance
$\Rightarrow$ OUF !