TP : Intégration et résolution d'équations différentielles

1 Étude du tramway de la ligne T3

1.1 Présentation générale

L'objectif de cette étude est d'écrire un script Python permettant de traiter des mesures issues d'un accéléromètre de téléphone portable pour en extraire les données utiles : position, vitesse, etc.

FIGURE 1 – Tramway T3 à la station Cité U.

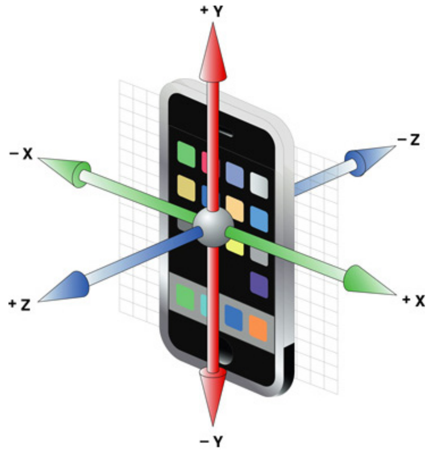


FIGURE 2 – Axes de l'accéléromètre du téléphone.

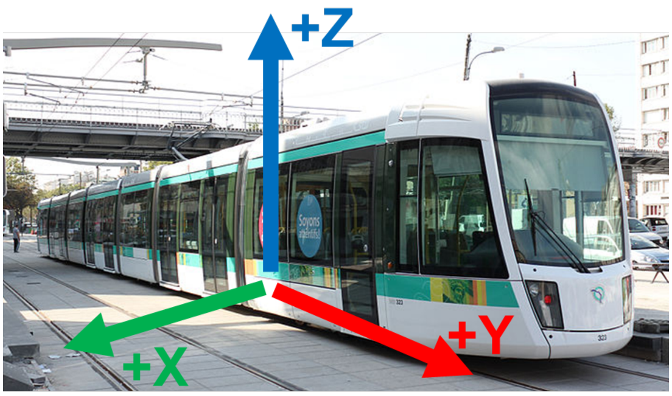
Les mesures ont été réalisées sur un tramway de la ligne T3 à Paris.

Conditions expérimentales :

Le téléphone portable est tenu par un passager de sorte que celui-ci reste parallèle au sol, ainsi le vecteur +Z s'oppose à la pesanteur.

L'essai a été réalisé en ligne droite. On s'intéressera donc aux accélérations selon X et Y.

Au départ, le tramway est à l'arrêt.



On cherche à obtenir les courbes de la vitesse et de position, la valeur maximale de la vitesse et la distance parcourue lors de l'essai.

L'objectif est alors de vérifier si le tramway se déplace bien en ligne droite et si la vitesse autorisée de 60 km/h en section courante n'est pas dépassée (suivant la réglementation du BIRMTG : Bureau Inter-régional des Remontées Mécaniques et des Transports Guidés).

1.2 Résolution numérique

Ouvrir le fichier `etude_tramway.py` contenant les mesures sous forme de listes `acceleration_x`, `acceleration_y` et `temps`.

Q 1. Compléter le code permettant de calculer le vecteur `vitesse_rect_x` par la méthode des rectangles et afficher la courbe.

Q 2. Compléter le code permettant de calculer le vecteur `vitesse_trap_x` par la méthode des trapèzes et afficher la courbe.

Q 3. Compléter le code permettant de calculer le vecteur `position_x` par la méthode des trapèzes et afficher la courbe.

Q 4. Compléter le code permettant de calculer le vecteur `position_y` par la méthode des trapèzes et afficher la courbe.

Q 5. Répondre à la problématique.

2 Étude du saut de Félix Baumgartner

2.1 Présentation générale

Le 14 octobre 2012, Felix Baumgartner réalise un saut en chute libre depuis une altitude vertigineuse de 39 000 m. Il dépasse le mur du son au cours de la chute, ce qui constitue une première !

Ce genre d'exploit est minutieusement préparé et des calculs préalables permettent de prévoir les temps de chute et les vitesses atteintes au cours du vol. Ces simulations permettent d'anticiper le saut, puis sont comparées aux mesures faites durant le vol (cf FIGURE 4).

FIGURE 3 – Vue de la capsule au début du saut de Félix Baumgartner.

Ce problème vise à déterminer la loi de vitesse et d'altitude au cours de la chute, en tenant compte des paramètres physiques du vol : à cette altitude, la densité de l'air (et donc la trainée) change et la gravité évolue.

La trainée aérodynamique est modélisée par une loi quadratique (écoulement turbulent) sous la forme :

$$F_{\text{air}} = -\frac{1}{2}\rho(h)AC_x v^2$$

où $A = 0{,}45$ m^2 est la surface apparente, $C_x = 0.8$ le coefficient de trainée dans l'air, $\rho(h)$ est la densité de l'air à l'altitude h et v la vitesse.

L'action de pesanteur est modélisée par une force centrale sous la forme :

$$P(h) = \frac{GMm}{(R+h)^2}$$

où $G = 6{,}73 \times 10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2} est la constante de gravitation, $M = 6 \times 10^{24}$ kg la masse de la terre, $m = 80$ kg la masse du parachutiste, $R = 6{,}371 \times 10^6$ m le rayon de la terre et h l'altitude.

L'application du principe fondamental de la dynamique, projeté sur un axe vertical *orienté vers le bas*, s'écrit :

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}\rho(h)AC_x v^2 + \frac{GMm}{(R+h)^2}$$

L'évolution de la densité de l'air en fonction de l'altitude h est approchée par la loi expérimentale :

$$\rho(h) = 1.433 \times \exp\left(-\frac{13h}{100000}\right) \quad \text{en kg.m}^{-3}$$

2.2 Résolution numérique

On cherche à retrouver les courbes expérimentales (vitesse et altitude en fonction du temps) à partir des modélisations proposées.

Q 6. Tracer sur Python la loi d'évolution de la densité de l'air en fonction de l'altitude sur l'intervalle $[0\ m,\ 39\,000\ m]$ et vérifier qu'elle ne peut pas être considérée comme constante.

Q 7. Écrire l'équation liant la vitesse de chute $v(t)$ et l'altitude $h(t)$.

Q 8. Mettre l'ODE issue du PFD sous forme d'un problème de Cauchy en posant un vecteur $Y(t)$ et une fonction $F(t,Y)$ tels que $\frac{dY}{dt} = F(t,Y)$.

Q 9. Écrire un programme Python permettant de réaliser l'intégration de ce problème de Cauchy par le schéma d'Euler explicite.

Q 10. Tracer l'évolution de la vitesse $v(t)$ et de l'altitude $h(t)$ sur les 120 premières secondes.

2.3 Comparaison aux mesures

Le fichier *mesure_chute_Baumgartner_TVH.csv* contient les données mesurées lors du saut par la centrale inertielle et le module GPS sur les 120 premières secondes de vol.

Les trois colonnes du fichiers sont le temps t, la vitesse $v(t)$ et l'altitude $h(t)$.

Q 11. Ouvrir le script Python `saut_baumgartner.py`, commenter ce que fait chacune des lignes de la fonction `read_baumgartner_data()`.

Q 12. Lire le fichier .csv contenant les mesures, tracer la courbe expérimentale de vitesse, puis superposer la courbe de vitesse mesurée et la courbe de vitesse simulée.

Q 13. Proposer des causes potentielles aux écarts observés entre les résultats simulés et expérimentaux.

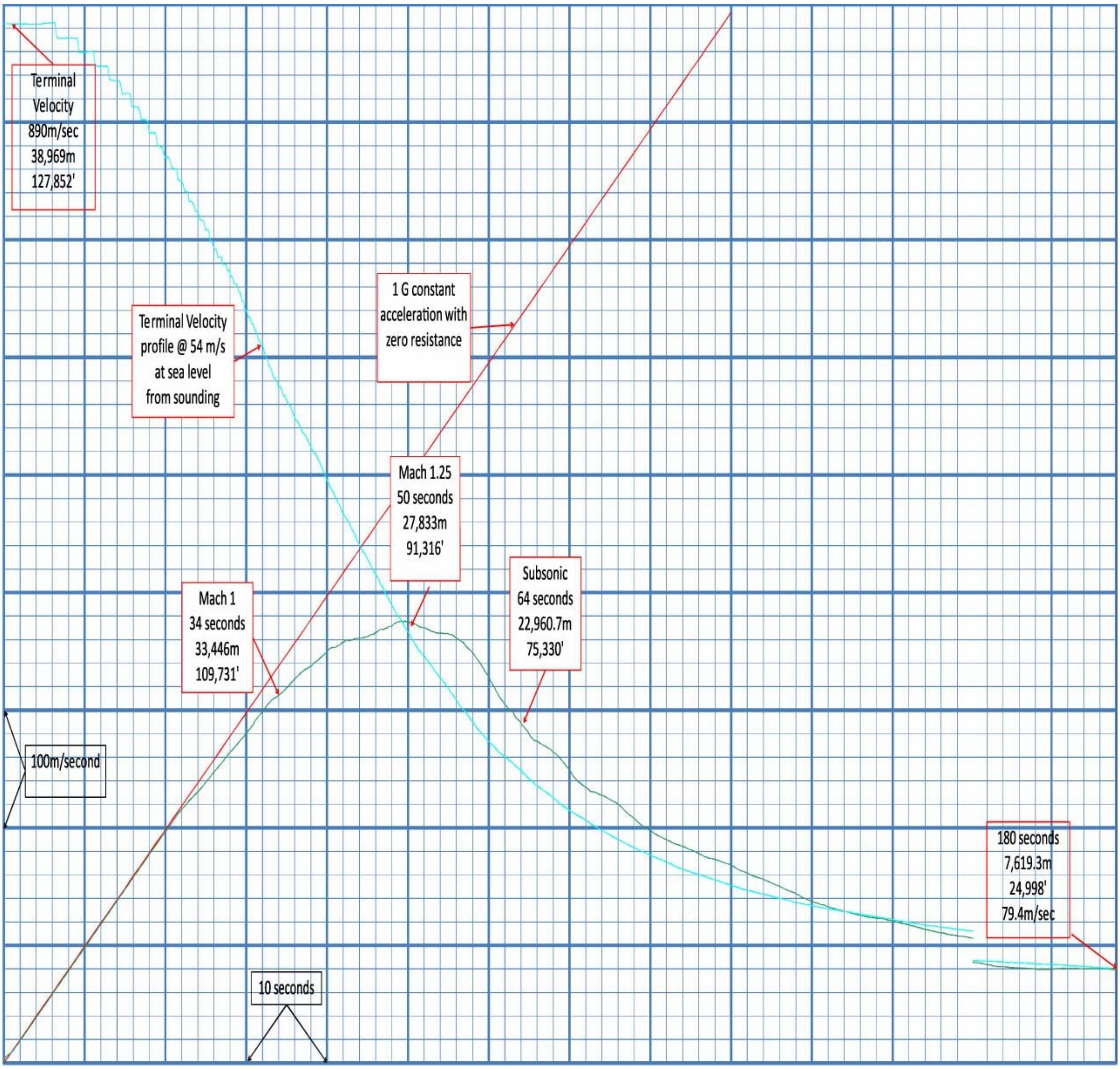


FIGURE 4 – Mesure de vol du saut de Felix Baumgartner.

3 Étude d'un chariot motorisé asservi en vitesse

Comme vu dans l'année, un hacheur ne peut pas délivrer au moteur une tension supérieure à sa tension U_{max} d'alimentation. Pour des entrées en échelon trop importante, une saturation de tension apparaît dans la chaîne directe (cf FIGURE 5) et modifie le comportement du système, qui devient non linéaire.

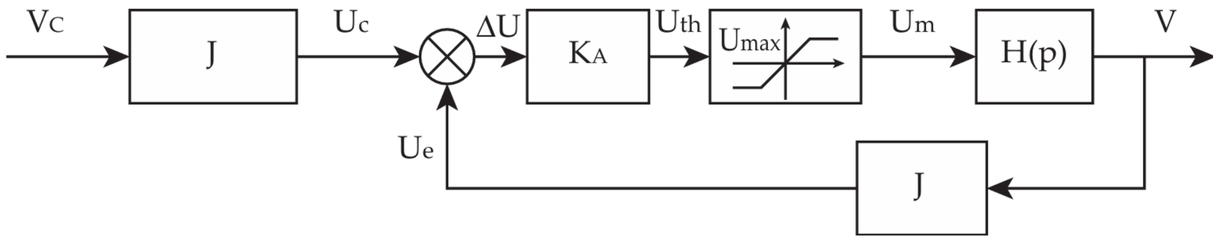


FIGURE 5 – Schéma-blocs du système asservi en prenant en compte la saturation en tension.

On souhaite obtenir numériquement la réponse de ce système asservi à un échelon. Pour cela, il faut intégrer les équations différentielles de comportement en temps.

Le chariot motorisé est modélisé par la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{V(p)}{U_m(p)} = \dfrac{K}{1+\tau p}$ où $V(p)$ et $U_m(p)$ sont, respectivement, la transformée de Laplace de sa vitesse de translation et de la tension en entrée du moteur.

Q 14. On s'intéresse tout d'abord à la simulation du chariot seul. Déterminer l'équation différentielle liant $u_m(t)$ et $v(t)$.

Q 15. En utilisant un schéma numérique explicite d'Euler, proposer un algorithme permettant de calculer itérativement la réponse $v(T)$ du système à un échelon $u_m(t) = u_0.u(t)$ pour $T > 0$ et $v(0) = 0$ m/s.

Q 16. De la même manière, proposer un algorithme permettant de calculer numériquement la réponse du système en boucle fermée avec saturation, jusqu'au temps T, à une sollicitation en échelon $v_c(t) = v_c.u(t)$.

Q 17. Simuler la réponse du système pour $T = 10$ s, $\tau = 2$ s, $K = 1$ m/(s.V), $K_a = 2$, $J = 1$ (V.s)/m, $v(0) = 0$ m/s et $U_{max} = 10$ Volts lorsque $v_c = 10$, 20 et 50 m/s.

Q 18. Mesurer à chaque fois le temps de réponse à 5% du système. Justifier du comportement non linéaire de ce système asservi par rapport à la rapidité attendue du SLCI équivalent si il n'y avait pas de saturation de tension.