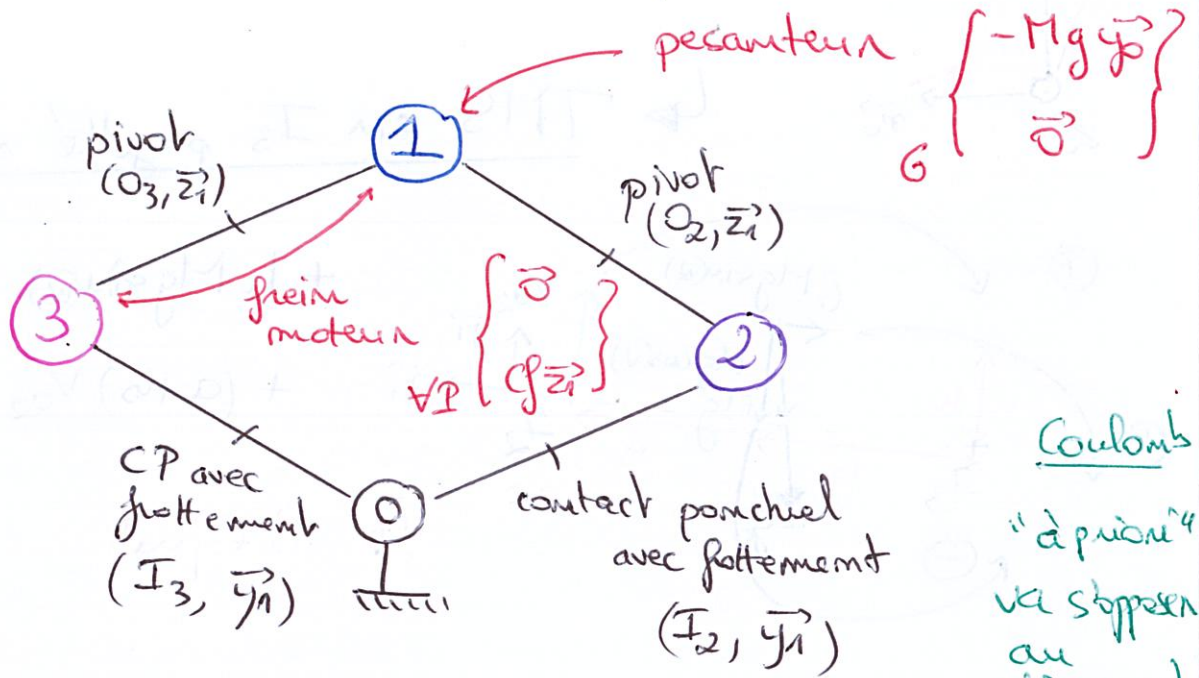


TD3 : Modélisation du frottement (1)

Exercice 1 : Aide au démanège en pente

P1)



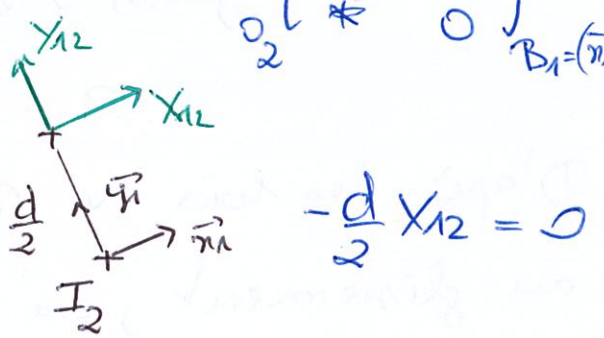
Coulomb
"à priori"
va s'opposer
au
glissement
selon $-\vec{y}_1$

P2) On isole $\{2\}$, BAME: $T_{0 \rightarrow 2} = \left\{ \begin{matrix} X_{02} \vec{n}_1 + Y_{02} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{I_2}$

TRS: $\begin{cases} I_{\vec{n}_1} : X_{02} + X_{12} = 0 \\ I_{\vec{y}_1} : Y_{02} + Y_{12} = 0 \end{cases}$

$T_{1 \rightarrow 2} = \left\{ \begin{matrix} X_{12} \\ Y_{12} \\ 0 \end{matrix} \right\}_{O_2}$ (with X_{12} circled in red and 0 crossed out)
"=0" avec hyp de problème plan
 $B_1 = (\vec{n}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$

TMS en I_2 projetée sur \vec{z}_1 :



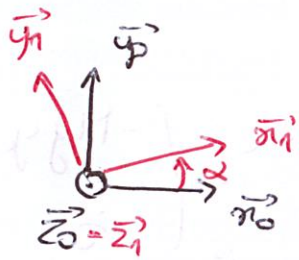
$-\frac{d}{2} X_{12} = 0$

Au final: $X_{12} = X_{02} = 0 \Rightarrow T_{0 \rightarrow 2} = \left\{ \begin{matrix} X_{02} \vec{y}_1 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{I_2}$

P3) On isole le véhicule $\{1+2+3\}$,

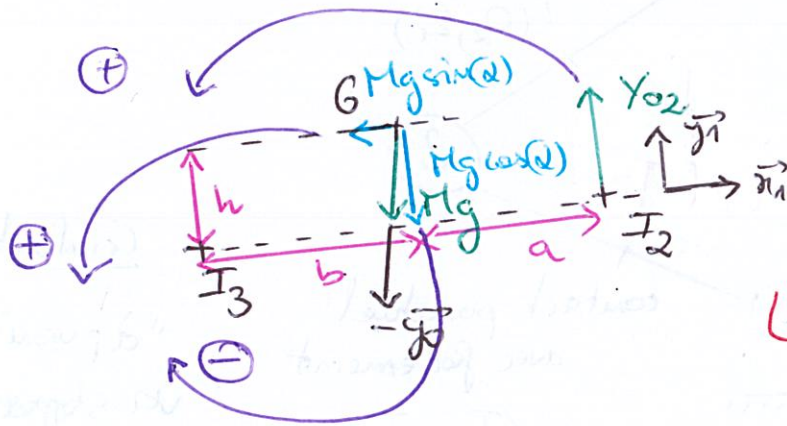
BAME: $T_{0 \rightarrow 3}$, $T_{0 \rightarrow 2}$ et $T_p \rightarrow 1$

↳ TRS :



$$\begin{cases} / \vec{x}_1 : -Mg \sin(\alpha) + X_{03} = 0 \\ / \vec{y}_1 : -Mg \cos(\alpha) + Y_{02} + Y_{03} = 0 \end{cases}$$

↳ TMS em I_3 projeté sur \vec{z}_1 :



$$\begin{aligned} &+ h Mg \sin(\alpha) - b Mg \cos(\alpha) \\ &+ (a+b) Y_{02} = 0 \end{aligned}$$

↳ 3 équations, 3 inconnues
 \Rightarrow on répond !

↳ Résolution :

$$X_{03} = Mg \sin(\alpha) \quad (i)$$

$$Y_{02} = \left[\frac{b}{a+b} \cos(\alpha) - \frac{h}{a+b} \sin(\alpha) \right] Mg \quad (ii)$$

$$\text{et } Y_{03} = Mg \cos(\alpha) - Y_{02} = \left[\frac{a}{a+b} \cos(\alpha) + \frac{h}{a+b} \sin(\alpha) \right] Mg \quad (iii)$$

94) D'après les lois de Coulomb pour la résistance au glissement, on est à la limite du glissement pour une pente α tel que $X_{03} = f Y_{03}$!

↳ "les deux > 0 "

$$\Leftrightarrow Mg \sin(\alpha) = f Mg \left[\frac{a}{a+b} \cos(\alpha) + \frac{h}{a+b} \sin(\alpha) \right]$$

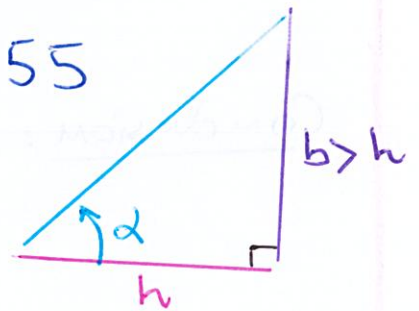
$$\Leftrightarrow \tan(\alpha) = f a / (a+b - fh) \approx 30\% \text{ (pente limite)}$$

Q5) Y_{O_2} compense une partie du poids du véhicule \Rightarrow véhicule bascule en arrière
 dès lors que Y_{O_2} passe de " > 0 " à " < 0 ".

$$Y_{O_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a+b} \cos(\alpha) = \frac{h}{a+b} \sin(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \tan(\alpha) = \frac{b}{h} \approx 1,55$$

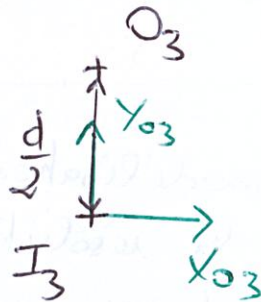
soit une pente de 155%.



Q6) On isole $\{3\}$, BAME $T_{0 \rightarrow 3}$, $T_{1 \rightarrow 3}$ et $T_{\text{pneu} \rightarrow 3}$

\hookrightarrow TMS en O_3 \vec{z}_1 :

\hookrightarrow pour éviter inconnues de la liaison pivot



$$C_f + \frac{d}{2} X_{O_3} = 0$$

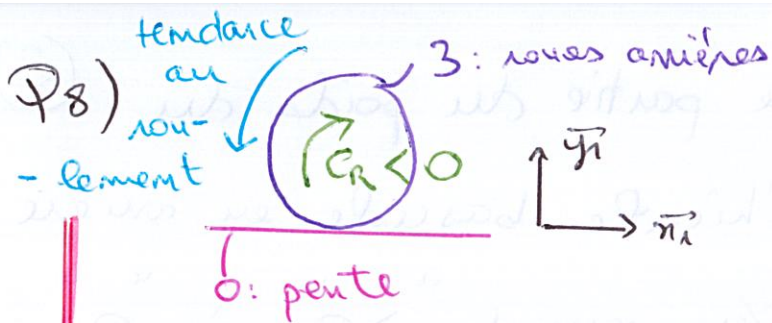
$$\Rightarrow \boxed{C_f = -\frac{d}{2} Mg \sin(\alpha)} \quad (*)$$

Q7) Application numérique: $C_f \approx -1190 \text{ Nm} < 0$

ce qui est cohérent car s'oppose au couple dû à la composante tangentielle

des frottements qui est > 0 .

\hookrightarrow tendance à faire tourner $\{3\}$ de \vec{z}_1 vers \vec{y}_1



C_R le couple de résistance au roulement

tel que $\vec{C}_R = -\mu \gamma_3 \vec{z}_1$

\hookrightarrow limite du roulement

\hookrightarrow Application numérique : $C_R \approx -3.1 \text{ Nm}$

pour une pente

de 30% \rightarrow cas le + défavorable de la limite du glissement

Conclusion : couple de résistance au roulement "aide" (même sens que C_f) Mais reste négligeable car $|C_R| \ll |C_f|$

\hookrightarrow 1^{ère} approche rapide pour avoir "ordre de grandeur" en considérant résistance au roulement uniquement sur la roue arrière où le frein s'applique !

\hookrightarrow Pour avoir une modélisation + rigoureuse, il faut reprendre toute la résolution en considérant des moments de résistance au roulement dans $T_{0 \rightarrow 2}$

et $T_{0 \rightarrow 3} = \begin{Bmatrix} X_{03} & \neq \\ Y_{03} & \neq \\ I_3 & \neq N_{03} \end{Bmatrix} (\vec{n}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ on obtient alors :

mom nul cette fois !

\hookrightarrow Isolement {2} et TMS en O_2 / \vec{z}_1 : $N_{02} + \frac{d}{2} X_{02} = 0$ (1)

\hookrightarrow Isolement {3} et TMS en O_3 / \vec{z}_1 : $N_{03} + C_f + \frac{d}{2} X_{03} = 0$ (2)

\hookrightarrow Isolement {1+2+3} et TRS + TMS en I_3 / \vec{z}_1 :

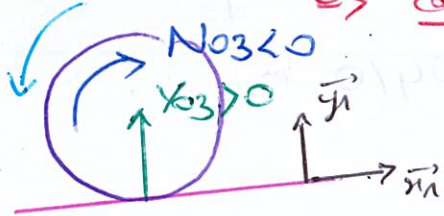
$X_{03} + X_{02} - Mg \sin(\alpha) = 0$ (3) $Y_{03} + Y_{02} - Mg \cos(\alpha) = 0$ (4)

$h Mg \sin(\alpha) - b Mg \cos(\alpha) + (a+b) Y_{02} + N_{02} + N_{03} = 0$ (5)

On a donc 7 inconnues ($X_{02}, X_{03}, Y_{02}, Y_{03}, N_{02}, N_{03}$ et cf) (3)
 pour 5 équations

↳ On se place dans le cas le + défavorable
 tendance au roulement pour dimensionner le couple de frein

tendance au roulement



↳ cad : limite du roulement

$$N_{02} = -\mu Y_{02} \quad (6)$$

$$N_{03} = -\mu Y_{03} \quad (7)$$

↳ aux signes $Y_{0i} > 0$ car s'oppose au poids tandis que $N_{0i} < 0$ car s'oppose au roulement

↳ On peut alors résoudre et on obtient au final :

$$C_f = Mg \left[\mu \cos(\alpha) - \frac{d}{2} \sin(\alpha) \right] = -1130 \text{ Nm pour } \alpha \sim 30\%$$

↳ écart de 60 Nm dû à la résistance au roulement

$$Y_{02} = Mg \left[\frac{b - \mu}{b + a} \cos(\alpha) - \frac{h}{b + a} \sin(\alpha) \right]$$

$$Y_{03} = Mg \left[\frac{a + \mu}{b + a} \cos(\alpha) + \frac{h}{b + a} \sin(\alpha) \right]$$

↳ 1^{er} approx était déjà pertinente (écart $\approx 32 \text{ Nm}$)

$$X_{02} = -2 \frac{N_{02}}{d} = -2 \frac{\mu Y_{02}}{d} \approx -92 \text{ N pour } \alpha \sim 30\%$$

$$X_{03} = -2 \left(\frac{N_{03} + C_f}{d} \right) = -2 \left(\frac{\mu Y_{03} + C_f}{d} \right) \approx 3390 \text{ N pour } \alpha \sim 30\%$$

↳ On retrouve $|X_{02}| \ll |X_{03}|$ pas aberrant de négliger la résistance au roulement.

Exercice 2 : Couple transmissible par un embrayage

Q1) lorsque l'on considère qu'il y a adhérence entre 1, 2 et 4 \Leftrightarrow ces solides sont emboîtés par friction d'où :

$$\omega_{1/0} = \omega_{2/0} = \omega_{4/0} \quad (**)$$

On, liaison glissière de direction \vec{z} entre 2 et 3

$$\Rightarrow \vec{\Omega}_{2/3} = \vec{0} \quad \text{ie: en projection sur } \vec{z}$$

$$(***) \omega_{2/3} = \omega_{2/0} - \omega_{3/0} = 0$$

Conclusion: $(*)$ et $(***) \Rightarrow \omega_{3/0} = \omega_{1/0}$ (rotation de l'arbre moteur transmise à arbre primaire)

Q2) Dans le cas du glissement entre 1 et 2,

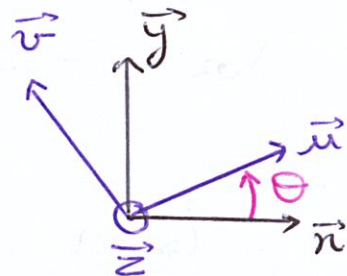
$$\vec{V}_{M \in 2/1} = \vec{V}_{M \in 2/0} - \vec{V}_{M \in 1/0}$$

$$\text{BABAR en } \vec{e} = \vec{M}O \wedge \vec{\Omega}_{2/0} - \vec{M}O \wedge \vec{\Omega}_{1/0}$$

$$\text{repensant en } O = -r \vec{u} \wedge (\omega_{2/0} - \omega_{1/0}) \vec{z}$$

$e(O, \vec{z})$ axe rotation

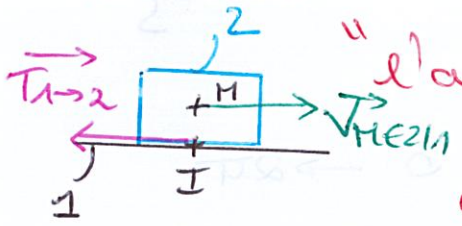
$$1/0 \text{ et } 2/0 = r \omega_{2/1} \vec{v} \quad (\text{selon } -\vec{v} \text{ pour } \omega_{1/0} > \omega_{2/0})$$



Q3) d'action tangentielle $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ de résistance au glissement est donc selon $+\vec{v}$!

Remarque : Bien que le cas de glissement

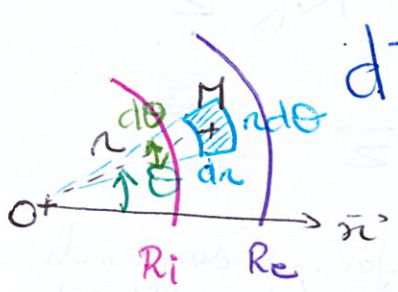
↳ lorsque doute, revenir à la translation: est - intuitif, on a toujours



"l'autogométrie" entre vitesse et force

d'où $T_{1 \rightarrow 2}$ et $T_{2 \rightarrow 1}$ sont sens opp à $V_{1 \rightarrow 2}$

D'où le tenseur élémentaire d'AM de 1 sur 2 en M,



$$dT_{1 \rightarrow 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ dX_{12} & 0 \\ dz_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

"base naturelle" de l'AM avec $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})$ flottant ici

On pression normale uniforme $\Leftrightarrow N_R = p \pi (R_e^2 - R_i^2)$

puis $dz_{12} = p dS = p r dr d\theta$

surface contact entre 1 et 2

Et loi de Coulomb à la limite du glissement

$$\Rightarrow dX_{12} = \int dz_{12} = \int p r dr d\theta$$

Q4) Par changement de point,

$$dT_{1 \rightarrow 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \int p r dr d\theta & - \int p r^2 dr d\theta \\ 0 & \int p r^2 dr d\theta \end{pmatrix}_{(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z})}$$

↳ passage au modèle globale par intégration

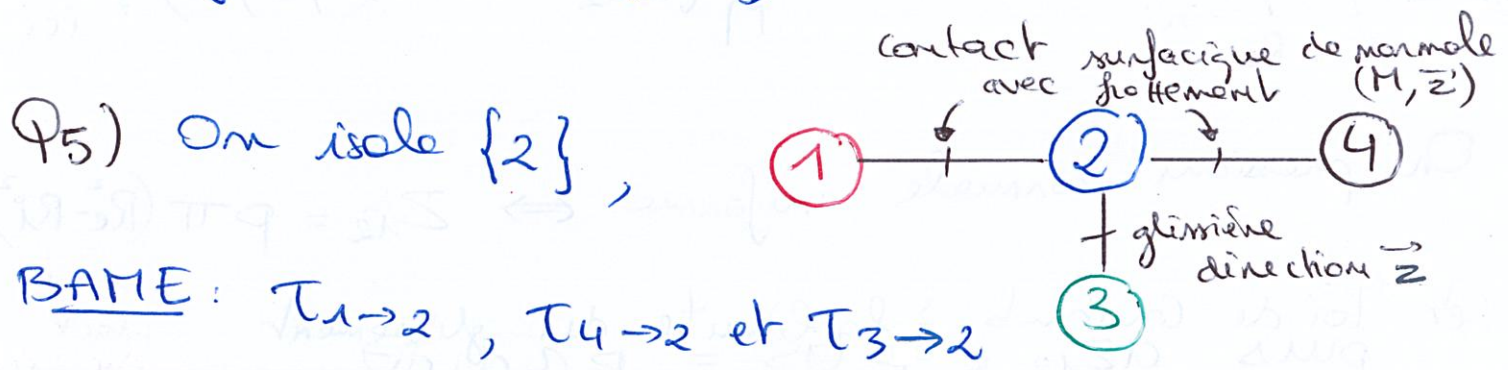
$$\vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \int_{r=R_i}^{R_e} \int_{\theta=0}^{2\pi} d\vec{R}_{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad \vec{M}_{O, 1 \rightarrow 2} = \iint_S d\vec{M}_{O, 1 \rightarrow 2}$$

Par symétrie de révolution $\theta = 0 \rightarrow 2\pi$

les composantes élémentaires selon \vec{v} se compensent sur un tour complet du disque.

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \pi p (R_e^2 - R_i^2) \vec{z} = N_R \vec{z} \\ \vec{M}_{O, 1 \rightarrow 2} = \int \frac{2\pi}{3} p (R_e^3 - R_i^3) \vec{z} \end{cases}$$

Q5) On isole {2},



BAME: $T_{1 \rightarrow 2}$, $T_{4 \rightarrow 2}$ et $T_{3 \rightarrow 2}$

TRS projeté sur \vec{z} : $N_{12} + N_{42} = 0$

$$\Leftrightarrow N_{24} = N_{12} = N_R \quad (\text{pression de contact identique})$$

Q6) Déjà répondu \rightarrow pression uniforme permet d'écrire:

$$N_R = \pi (R_e^2 - R_i^2) p$$

Q7) Couple transmissible par l'embrayage:

$$\|\vec{M}_{O, 1 \rightarrow 2}\| = \frac{2}{3} \int N_R \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2} \approx 72 \text{ Nm}$$

Conclusion: Cdc si non respecté, il faut un ressort avec $N_R + \text{grand!}$