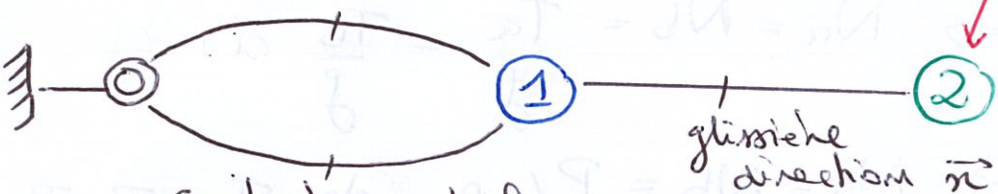
TD4 : Équilibre particulier : Arc-boutement (1)

Q1) Graphe de liaison de la potence avec hyp pb plan $(O,\vec{x},\vec{y})$

contact ponctuel de normale $(B,\vec{y})$ avec frottement

pesanteur $C\begin{Bmatrix} -P\vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$



glissière direction $\vec{x}$

contact ponctuel de normale $(A,\vec{x})$ avec frottement

$$\mathcal{T}_{0\to 1} = {}_A\begin{Bmatrix} -N_a & * \\ T_a & * \\ * & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad \forall P\begin{Bmatrix} 0 & * \\ Y_{12} & * \\ * & N_{12} \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})=\mathcal{B}}$$

$N_a = \|\vec{N_a}\|$ d'après énoncé on $\vec{N_a} = -N_a\vec{x}$

Q2) On isole {2}, BAME : $\mathcal{T}_{1\to 2}$ et $\mathcal{T}_{P\to 2}$

↳ équilibre sous deux actions mécaniques

$$\Rightarrow \mathcal{T}_{1\to 2} = -\mathcal{T}_{P\to 2} = {}_C\begin{Bmatrix} 0 & * \\ P & * \\ * & 0 \end{Bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

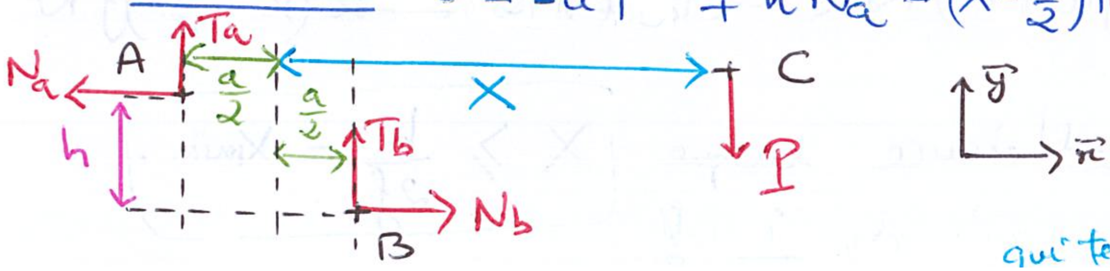
Q3) On isole {1}, BAME : $\mathcal{T}_{0\to 1a}$, $\underbrace{\mathcal{T}_{0\to 1b}}$ et $\mathcal{T}_{2\to 1}$

$${}_B\begin{Bmatrix} N_b & * \\ T_b & * \\ * & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

↳ TRS : $\begin{cases} /\vec{x} : -N_a + N_b = 0 \; (1) \\ /\vec{y} : T_a + T_b - P = 0 \; (2) \end{cases}$

$N_b = \|\vec{N_b}\|$ d'après énoncé

↳ TMS en B : $0 = -aT + hN_a - (X - \frac{a}{2})P \; (3)$



$\vec{T_b}$ selon $+\vec{y}$ car frottement s'oppose au poids qui tend à faire glisser !

Q4) À la limite du glissement,

$$\underbrace{T_a}_{>0} = f \underbrace{N_a}_{>0} \ (4) \quad \text{et} \quad \underbrace{T_b}_{>0} = f \underbrace{N_b}_{>0} \ (5)$$

↳ Système de 5 équations à 5 inconnues (T_a, N_a, T_b, N_b et X_{min})

$$(1), (4) \text{ et } (5) \Rightarrow N_a = N_b = \frac{T_a}{f} = \frac{T_b}{f} \quad (i)$$

$$(2) \text{ et } (i) \Rightarrow N_a = N_b = P/2f \quad (ii) \text{ et } T_a = T_b = \frac{P}{2}$$

$$(3) \text{ et } (ii) \Rightarrow 0 = -a\frac{P}{2} + \frac{hP}{2f} - \left(X_{min} - \frac{a}{2}\right)P$$

d'où $\boxed{X_{min} = h/2f}$

Q5) Dans le cas de l'adhérence, ie, équilibre du support avec les frottements, on a : $\begin{cases} T_a \leq f N_a \\ T_b \leq f N_b \end{cases}$

$(1) \Rightarrow \underbrace{N_a = N_b}$

$$(2) \Rightarrow P = T_a + T_b \leq f(N_a + N_b) = 2f N \ (*) \text{ noté } N$$

$$(3) \Rightarrow \left(X - \frac{a}{2}\right)P = -aT_a + hN \underset{(*)}{\leq} 2\left(X - \frac{a}{2}\right)fN$$

Or : $T_a \leq f N_a \iff -aT_a \geq -faN_a$

d'où : $(-fa + h)N \leq -aT_a + hN \leq 2\left(X - \frac{a}{2}\right)fN$

$\iff$ adhérence lorsque $\boxed{X \geq \frac{h}{2f} = X_{min}}$.

↳ Indépendant de P !

Q6) Théoriquement, la condition d'équilibre est indépendante de $\vec{P}$, augmenter son intensité n'y change rien tant que $X \geq X_{min}$.

Q7) En pratique, c'est la résistance des matériaux qui sera limitante vis-à-vis de l'équilibre théorique précédent.

↳ En effet, la modélisation des actions mécaniques faite ici suppose que les solides sont indéformables !

Résolution graphique des problèmes d'arc-boutement

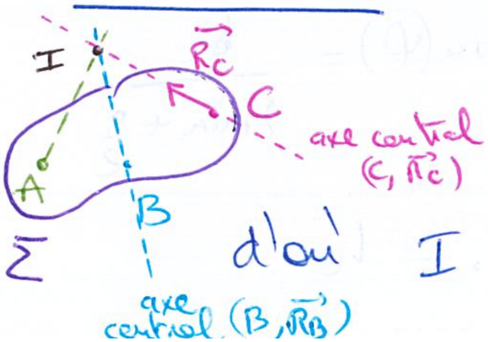
Q8) Soit Σ en équilibre sous l'action de :

$$_A\left\{\begin{matrix}\vec{R_A}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}, \quad _B\left\{\begin{matrix}\vec{R_B}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\} \text{ et } _C\left\{\begin{matrix}\vec{R_C}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\}$$

↳ On note I le point d'intersection des axes centraux $(B, \vec{R_B})$ et $(C, \vec{R_C})$ alors :

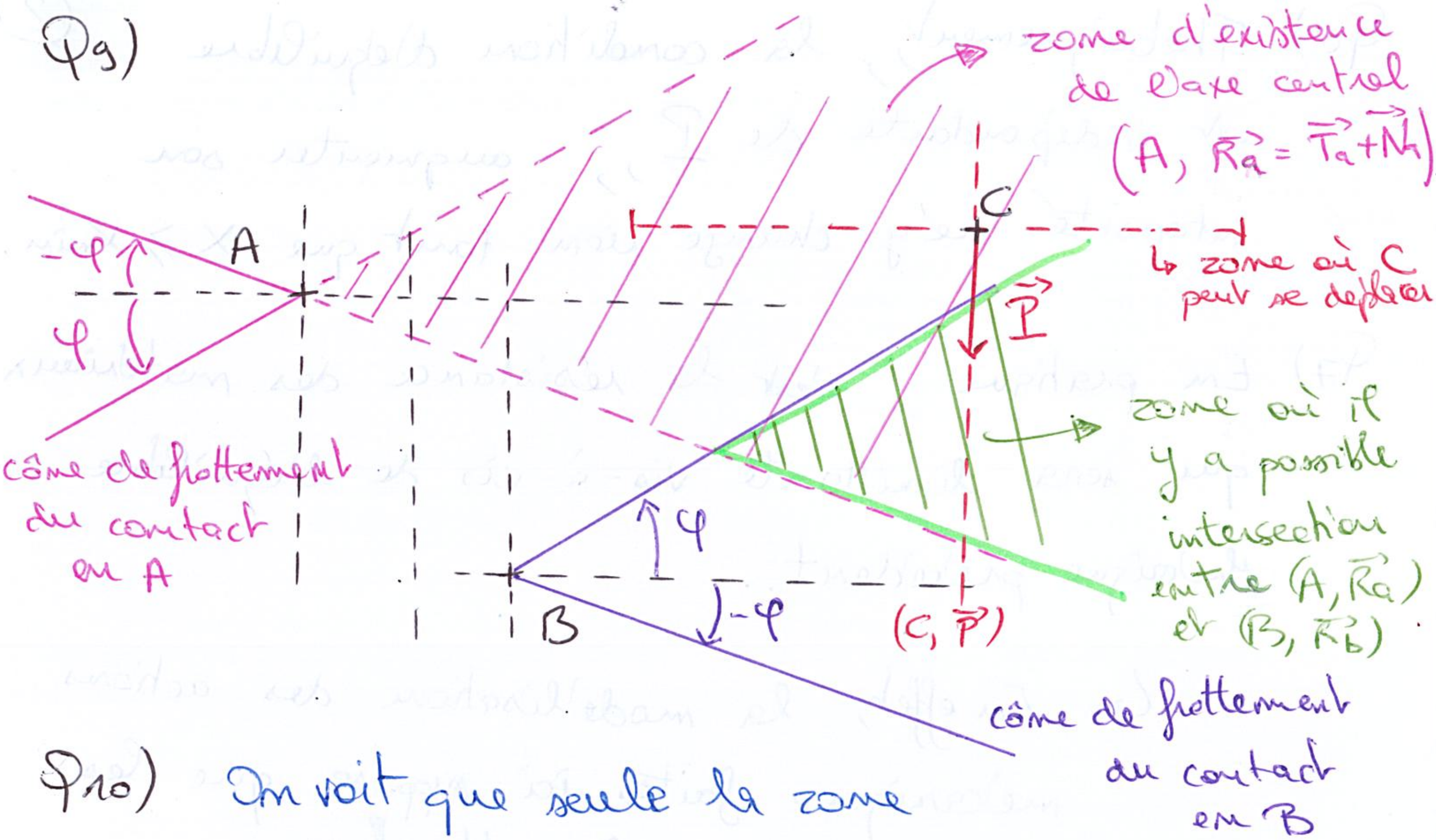
TMS en I : $\sum_{j \in \bar{\Sigma}} \vec{M}_{I, j\to\Sigma} = \vec{0} = \vec{IA} \wedge \vec{R_A}$

puisque $I \in (B, \vec{R_B})$ et $(C, \vec{R_C})$



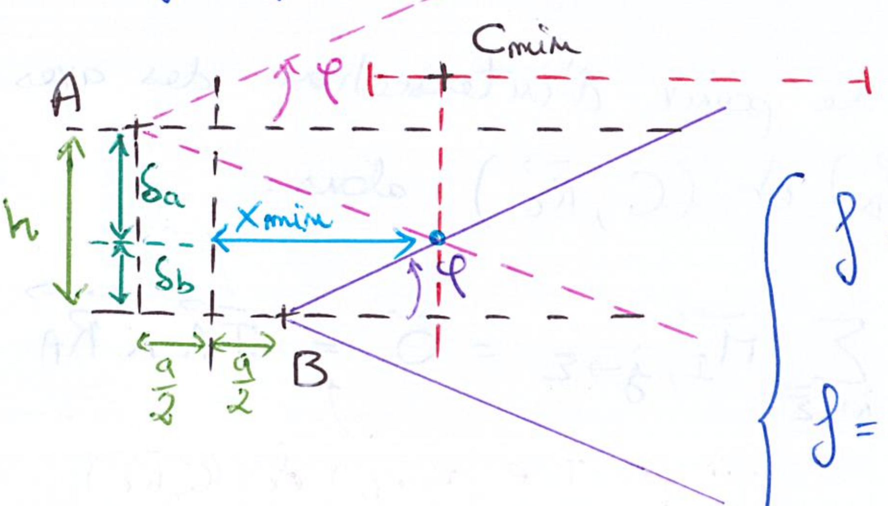
d'où I appartient aussi à $(A, \vec{R_A})$!

Q9)



Q10) On voit que seule la zone hachurée en [hachures] permet l'existence d'un point de concourance I des trois glisseurs $T_{0\to 1a}$, $T_{0\to 1b}$ et $T_{2\to 1}$ auquel est soumis le support 1.

↳ On en déduit la distance X_{min} de la charge P afin que son axe central $(C, \vec{P})$ intersecte cette zone :



↳ Graphiquement,

$$\begin{cases} f = \tan(\varphi) = \dfrac{\delta_b}{X_{min} - \frac{a}{2}} \\ f = \tan(\varphi) = \dfrac{\delta_a}{X_{min} + \frac{a}{2}} \\ \delta_a + \delta_b = h \end{cases}$$

ccl : $\boxed{2 f X_{min} = h}$