DS 2 : samedi 23 septembre

2h sans calculatrice

Le candidat numérotera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 *(le cours et ses méthodes)*.

1° **Cours.**

a) Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives telles que :

$$\exists n_0 \,/\, \forall n \geq n_0,\ 0 \leq u_n \leq v_n.$$

Monter que si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge et que si la série $\sum u_n$ diverge alors il en est de même pour la série $\sum v_n$.

b) Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses, donner une démonstration pour celles qui sont vraies et un contre-exemple pour celles qui sont fausses. (u_n) et (v_n) désignent deux suites réelles.

(i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\sum u_n$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2° **Application des méthodes du cours.**

a) Déterminer la nature et la valeur de la somme de la séries $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

b) En utilisant la règle de d'Alembert, déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{4^n n!}$.

c) Déterminer la nature de $\displaystyle\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ et de $\displaystyle\sum \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$

d) Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge, puis écrire une fonction Python `somme(eps)` calculant la somme de la série à `eps>0` près.

e) Soit $\alpha > 1$, déterminer un équivalent de la suite (R_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par : $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Indication : On pourra introduire, pour $n \in \mathbb{N}$ et $N \geq n$, $R_{n,N} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha}$ et procéder à une comparaison série/intégrale.

Exercice 2 *(D'après* E3A PSI, *Maths 1,* 2016*)*.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}),\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ \text{ et } \ B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

1° On prend **dans cette question**, pour tout $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

a) vérifier que $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge et calculer sa somme.

b) Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ tels que la série $\sum\limits_{n\geq 1} n x^{n-1}$ converge. Dans le cas où cela converge on déterminera la valeur de la somme de cette série.

c) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ converge et donner sa somme.

2° On prend **dans cette question**, $a_n = \frac{1}{n\ln(n)}$, $n \geq 2$ et $a_1 = 0$.

a) Etudier la monotonie et la convergence de la suite $(a_n)_{n\geq 2}$.

b) Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$?

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n a_n$.

d) Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} b_n$?

3° On suppose **dans cette question** que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite décroissante de réels positifs.

a) Pour tout entier naturel n non nul, on note $u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} a_p$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ na_{2n} \leq u_n$.

b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} na_{2n} = 0$.

c) Démontrer alors que $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$.

d) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge.

e) A-t-on $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?

4° On suppose **dans cette question** que la série $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est positive, décroissante et de limite nulle.

a) Vérifier que $\forall m \in \mathbb{N}^\star,\ m \leq n,\ B_n \geq A_m - ma_{n+1}$.

b) En déduire que $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

c) Peut-on en déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?