DS 2 : samedi 23 septembre

2h sans calculatrice

Le candidat numérotera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1 *(le cours et ses méthodes)*.

1° **Cours.**

a) Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives telles que :

$$\exists n_0 \,/\, \forall n \geq n_0,\, 0 \leq u_n \leq v_n.$$

Monter que si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge et que si la série $\sum u_n$ diverge alors il en est de même pour la série $\sum v_n$.

b) Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses, donner une démonstration pour celles qui sont vraies et un contre-exemple pour celles qui sont fausses. (u_n) et (v_n) désignent deux suites réelles.

(i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\sum u_n$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2° **Application des méthodes du cours.**

a) Déterminer la nature et la valeur de la somme de la séries $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

b) En utilisant la règle de d'Alembert, déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^n}{4^n n!}$.

c) Déterminer la nature de $\displaystyle\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ et de $\displaystyle\sum \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$

d) Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge, puis écrire une fonction Python `somme(eps)` calculant la somme de la série à `eps>0` près.

e) Soit $\alpha > 1$, déterminer un équivalent de la suite (R_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par : $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Indication : On pourra introduire, pour $n \in \mathbb{N}$ et $N \geq n$, $R_{n,N} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha}$ et procéder à une comparaison série/intégrale.

Correction :

1° a) Notons (S_n) (resp. (T_n)) la suite des sommes partielles de (u_n) (resp. (v_n). En sommant les inégalités on a $0 \leq S_n - S_{n_0} \leq T_n - T_{n_0}$. Comme on considère des SATP, les suites (S_n) et (T_n) sont croissantes (en effet pour tout n, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$).
Si $\sum v_n$ converge alors (T_n) possède une limite donc T_n est majoré, il en va de même pour $(T_n + S_{n_0} - T_{n_0})$ (si T_n est majoré par M, $T_n + S_{n_0} - T_{n_0}$ est alors majoré par $M + S_{n_0} - T_{n_0}$) ainsi la suite (S_n) est croissante et majorée, elle converge donc d'après le théorème de la limite monotone, ce qui reviens exactement à dire que $\sum u_n$ est convergente.
Si $\sum u_n$ est divergente alors (S_n) est divergente, comme elle est croissante on a donc $\lim S_n = +\infty$, ainsi T_n est minorée par une une suite qui tend vers $+\infty$, donc (d'après le théorème de comparaison pour les suites) (T_n) diverge aussi vers $+\infty$, ie. la série $\sum v_n$ est divergente.

b) (i) C'est faux, la série harmonique (ie. $\sum \frac{1}{n}$) est divergente alors que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0.

(ii) On suppose $\sum u_n$ convergente, notons (S_n) la suite des sommes partielles, comme $\sum u_n$ converge on a (S_n) qui converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$, il en va de même pour la suite (S_{n-1}). En remarquant, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, que $u_n = S_n - S_{n-1}$ on en déduit que la suite (u_n) converge vers $\ell - \ell = 0$.

2° a) Notons pour $n \geq 2$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$. On a $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) + \ln(k+1) - 2\ln(k) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k-1) - \ln(k) + \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) - \ln(k)$, ainsi par télescopage on a $S_n = \ln(1) - \ln(n) + \ln(n+1) - \ln(2) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln(2)$ qui tend vers $-\ln(2)$ quand n tend vers $+\infty$. La série converge et sa somme vaut $-\ln(2)$.

b) Ici $n_0 = 1$, notons pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = \frac{n^n}{4^n n!}$, on remarque que $u_n > 0$ et que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{4^{n+1}(n+1)!}\frac{4^n n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{4n^n} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\mathrm{e}}{4} < 1$$

La limite découle du fait que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(n\left(\frac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp\left(1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)$ et donc tend vers e par continuité de exp.
Ainsi la série est convergente d'après le critère de d'Alembert.

c) Notons, pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$. On a $n^{3/2}u_n = \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ainsi $\frac{\ln(n)}{n^2} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$, or $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge donc $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ converge absolument donc converge.
Notons, pour $n \geq 2$, $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$, on a $nv_n = \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ainsi $\frac{1}{n} = o(v_n)$, comme $\sum v_n$ diverge et qu'on est en présence de séries à termes positifs on en déduit que $\sum \frac{1}{\sqrt{n}\ln(n)}$ diverge.

d) La suite $\frac{1}{n+1}$ est une série décroissante qui tend vers 0, donc d'après le théorème spéciale des séries alternées la série est convergente. De plus ce même théorème donne que le n-ième reste est majoré (en valeur absolue) par $\frac{1}{n+2}$, pour avoir une valeur approchée à $\varepsilon > 0$ près il suffit de déterminer n tel que $\frac{1}{n+2} \leq \varepsilon$ (en effet $S - S_n = R_n$ où S_n est la n-ième somme partielle), ainsi $n \geq \frac{1}{\varepsilon} - 2$, ainsi $n = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} - 2 \right\rfloor + 1$ convient.
Code Python :

```
import numpy as np # on peut utiliser int() à la place de np.floor()
def somme(eps):
    S=0
    for k in range(np.floor(1/eps-2)+2): # +2 car range(n) va de 0 à n-1
        S += (-1)^k/(k+1)
    return S
```

e) On fait une comparaison série-intégrale. Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, comme $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $[k, k+1]$, on a pour tout $t \in [k, k+1]$: $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$, on intègre ensuite t entre k et $k+1$ pour trouver $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k^\alpha}$, puis on somme pour k allant de $n+1$ à N (on a le droit) pour trouver : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha}$.
Or $\displaystyle\int_{n+1}^{N} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{(N+1)^{-\alpha+1}}{1-\alpha} - \frac{(n+1)^{-\alpha+1}}{1-\alpha}$ Comme $1 - \alpha < 0$, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}(N+1)^{-\alpha+1} = 0$, donc en faisant tendre N vers $+\infty$ (pour les séries on a le droit) on a : $R_{n+1} \leq \dfrac{(n+1)^{-\alpha+1}}{\alpha - 1} \leq R_n$.
Ce qui permet d'obtenir : $\frac{(n+1)^{-\alpha+1}}{\alpha-1} \leq R_n \leq \frac{(n)^{-\alpha+1}}{\alpha-1}$.
Comme le majorant et le minorant sont équivalents, on en déduit donc que $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

Exercice 2 *(D'après* E3A PSI, *Maths 1,* 2016*)*.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}),\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ \text{ et } \ B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$$

1° On prend **dans cette question**, pour tout $n \geq 1$, $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

a) vérifier que $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge et calculer sa somme.

b) Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ tels que la série $\sum\limits_{n\geq 1} nx^{n-1}$ converge. Dans le cas où cela converge on déterminera la valeur de la somme de cette série.

c) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ converge et donner sa somme.

2° On prend **dans cette question**, $a_n = \frac{1}{n\ln(n)}$, $n \geq 2$ et $a_1 = 0$.

a) Etudier la monotonie et la convergence de la suite $(a_n)_{n\geq 2}$.

b) Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$?

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n$.

d) Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$?

3° On suppose **dans cette question** que la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est une suite décroissante de réels positifs.

a) Pour tout entier naturel n non nul, on note $u_n = \sum\limits_{p=n+1}^{2n} a_p$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star,\ na_{2n} \leq u_n$.

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_{2n} = 0$.

c) Démontrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.

d) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ converge.

e) A-t-on $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$?

4° On suppose **dans cette question** que la série $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est positive, décroissante et de limite nulle.

a) Vérifier que $\forall m \in \mathbb{N}^\star,\ m \leq n,\ B_n \geq A_m - ma_{n+1}$.

b) En déduire que $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge.

c) Peut-on en déduire que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$?

Correction :

1° a) C'est une série géométrique de raison $1/2 \in]-1,1[$, elle est donc convergente. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} = \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}$. On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 2$.

b) On a pour $x \neq 0$ (si $x = 0$ la série converge) : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)x^n}{nx^{n-1}}\right| = |x|$, donc d'après le critère de d'Alembert la série converge absolument (donc converge) pour $x \in]-1,1[$, elle diverge grossièrement pour les x tels que $|x| \geq 1$ et elle diverge grossièrement pour $x \in \{\pm 1\}$.

Notons, pour $N \in \mathbb{N}$ et $x \in]-1,1[$, $S_N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} x^n$. On a alors $S_N(x) = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}$. En dérivant par rapport à x on obtient d'une part $S_N'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} nx^{n-1}$ et d'autre part $S_N'(x) = \frac{-(N+1)x^N(1-x)+(1-x^{N+1})}{(1-x)^2}$. En faisant tendre N vers $+\infty$ on obtient $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

c) On a $b_n = n\left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Comme $1/2 \in]-1,1[$, la question précédente montre que $\sum b_n$ converge. La question précédente permet aussi d'obtenir $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-1/2)^2} = 2$

2° a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $n\ln(n) \leq (n+1)\ln(n+1)$, ainsi $a_{n+1} \leq a_n$, d'où la suite (a_n) est décroissante (rq on peut aussi introduire $f : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ et montrer, en la dérivant, qu'elle est décroissante).
De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

b) La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$ est continue, positive et décroissante, on peut utiliser une comparaison série-intégrale. On a $\forall k \geq 3$, $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\mathsf{d}t \leq a_k = f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\mathsf{d}t$. En sommant (et comme $a_1 = 0$) la relation de Chasles donne : $\forall n \geq 2,\ a_2 + \displaystyle\int_3^{n+1} f(t)\mathsf{d}t \leq A_n \leq a_2 + \int_2^n f(t)\mathsf{d}t$. Une primitive de f sur $]1, +\infty[$ est $t \mapsto \ln(\ln(t))$ et on a donc : $\forall n \geq 2,\ a_2 + \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln(3)) \leq A_n$. Le minorant étant de limite $+\infty$, il en est de même de A_n et $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge.

c) Pour $n \geq 2$, on a $na_n = \frac{1}{\ln(n)}$. On a donc directement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$.

d) Pour $n \geq 1$, après simplification on trouve $b_n = \frac{(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n)}{(n+1)\ln(n)\ln(n+1)}$. Pour simplifier on va procéder à un DL de $\ln(1+n) = \ln(n) + \ln(1+\dfrac{1}{n}) = \ln(n) + \dfrac{1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}(\dfrac{1}{n})$.
Ainsi le numérateur de b_n vaut : $(n+1)\ln(n+1) - n\ln(n) = n\ln(n) + \ln(n) + 1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1) - n\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, ce qui montre donc que $b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)} = a_{n+1}$. $\sum b_n$ est ainsi une série divergente (positive et équivalente à une série divergente).

3° a) Dans la somme définissant u_n, il y a n termes. Par décroissance de (a_k), le plus petit d'entre eux est a_{2n}. On a donc $na_{2n} \leq u_n$.

b) On a $u_n = A_{2n} - A_n$ et comme (A_n) converge (suite des sommes partielles de la série convergente $\sum a_n$) on en déduit que $u_n \to 0$. L'encadrement $0 \leq na_{2n} \leq u_n$ prouve alors que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} na_{2n} = 0$.

c) Posons $c_n = na_n$. On a $c_{2n} = 2(na_{2n}) \to 0$. De plus : $0 \leq c_{2n+1} \leq (2n+1)a_{2n} = c_{2n} + a_{2n+1}$. Comme $\sum a_k$ converge, $a_k \to 0$. Le majorant ci-dessus est de limite nulle et, par théorème d'encadrement, $c_{2n+1} \to 0$. Du résultat sur les extraites de rang pair et impair, on déduit que $c_n \to 0$, c'est à dire que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$.

d) On revient aux sommes partielles (puisque l'on est dans une situation théorique). On a :

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{k=1}^{n} ka_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)a_k = a_1 + \sum_{k=2}^{n}(k-(k-1))a_k + na_{n+1} = A_n + (n+1)a_{n+1} - a_{n+1}.$$

Les trois termes du membre de droite admettant une limite finie quand $n \to +\infty$, (B_n) converge et donc $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge.

e) Un passage à la limite dans l'identité précédente donne : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

4° a) Soit $1 \leq m \leq n$. Reprenons l'identité qu'on a démontré dans la question 3° d) (où on a simplifié le membre de droite) : $B_n = A_n + na_{n+1}$. Ainsi $B_n = A_m + \displaystyle\sum_{k=m+1}^{n} a_k + na_{n+1}$. Dans la somme, il y a $n-m$ termes tous plus grand que a_n et donc aussi que a_{n+1}. On en déduit que : $B_n \geq A_m + (n-m)a_{n+1} + na_{n+1} = A_m - ma_{n+1}$.

b) Fixons $m \in \mathbb{N}^\star$ et faisons tendre n vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente (les limites existent) : $\forall m \in \mathbb{N}^\star$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \geq A_m$. Ceci montre que (A_m) est une suite bornée. Comme elle croît (car les a_k sont ≥ 0), elle converge. Ainsi, $\sum a_k$ converge.

c) On est alors ramenés à la partie précédente et on a donc : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$