DS 3 : samedi 14 octobre

4h sans calculatrice

Le candidat numérotera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 *(proche du cours et/ou des TDs).*

1° Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de loi $\mathcal{G}(p)$ où $p \in]0,1[$.

(a) On pose $Z = \max(X, Y)$. Déterminer la loi de Z.

(b) Z est-elle d'espérance finie ? (Penser à majorer Z par ...)

2° Des personnes se transmettent une information. Chaque personne transforme l'information reçue en son contraire avec une probabilité $p \in]0,1[$, et la transmet fidèlement avec la probabilité $q = 1-p$. On note, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, p_n la probabilité que la n-ième personne reçoive l'information non déformée (cela ne signifie pas nécessairement qu'elle la transmettra fidèlement ni que la $(n-1)$-ième personne ai transmis fidèlement le message qu'elle a reçue). Ainsi $p_1 = 1$.
Notons A_n l'évènement « la n-ième personne reçoit l'information non déformée »et B_n l'évènement « la n-ième personne transforme le message qu'elle a reçue ».

(a) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, p_{n+1} en fonction de p_n.

(b) En déduire que la suite (p_n) est arithmético-géométrique[1], puis exprimer p_n en fonction de n et de p.

(c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Que remarque-t-on ?

3° On considère une urne qui contient deux boules noires et une boule rouge dans laquelle on effectue une infinité de tirages successifs et avec remise. On définit E l'évènement « on obtient au moins une boule rouge ». On souhaite calculer $\mathbb{P}(E)$ par trois méthodes différentes, pour cela, on note pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, A_n l'évènement « on obtient la première boule rouge au n-ième tirage », B_n l'évènement « on obtient au moins une boule rouge au cours des n premiers tirages »et C_n l'évènement « on obtient n boules noires au cours des n premiers tirages ».

(a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\mathbb{P}(A_n)$, $\mathbb{P}(C_n)$ et $\mathbb{P}(B_n)$.

(b) Exprimer E à l'aide des évènements A_n, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et en déduire $\mathbb{P}(E)$.

(c) Exprimer E à l'aide des évènements B_n, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et en déduire $\mathbb{P}(E)$.

(d) Exprimer $\overline{E}$ à l'aide des évènements C_n, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et en déduire $\mathbb{P}(E)$.

(e) Que dire de l'évènement E ? Interpréter ce résultat.

Exercice 2 *(Problème : Entropie au sens de Shannon, d'après* CONCOURS TSI, 2017*).*

I. Préliminaire

I.A Représenter graphiquement la fonction logarithme népérien.

I.B Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\ln(x) \leq x-1$ et que $\ln(x) = x-1$ si et seulement si $x = 1$.

I.C Donner une interprétation graphique de ces deux résultats.

I.D Montrer que la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(0) = 0$ et $\forall x \in]0,1]$, $g(x) = x\ln(x)$ est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1]$. Représenter graphiquement la fonction g.

On admet, pour tout $q \in]-1,1[$, que la série $\sum nq^{n-1}$ converge absolument et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.

II. Entropie d'une variable aléatoire

II.A Dans cette sous-partie, toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un même univers fini Ω et prennent leurs valeurs dans $[\![0,n]\!]$.
Si X est une telle variable, on note $p_k = \mathbb{P}(X = k)$. On définit l'entropie de X par :

$$H(X) = -\sum_{k=0}^{n} p_k \ln(p_k)$$

en convenant que $p_k \ln(p_k)$ vaut 0 lorsque $p_k = 0$.

II.A.1) Montrer que $H(X) \geq 0$ et que $H(X) = 0$ si et seulement si X est une variable aléatoire certaine, c'est-à-dire

$$\exists i \in [\![0,n]\!] \quad \text{tel que} \quad p_i = 1 \quad \text{et} \quad \forall j \neq i, \quad p_j = 0.$$

1. au cas où, après simplification, on trouve, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, que $p_{n+1} = (1-2p)p_n + p$

II.A.2) (a) X_0 est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$. Calculer $H(X_0)$.

(b) En appliquant l'inégalité de la question I.B à un nombre réel x bien choisi, démontrer que

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \qquad -p_k \ln(p_k) + p_k \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} - p_k.$$

(c) En déduire que $H(X) \leq H(X_0)$ avec égalité si et seulement si X suit la même loi que X_0 (pour le cas d'égalité on pourra utiliser le cas d'égalité de la question I.B).

II.B Dans cette sous-partie, on s'intéresse à des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et prenant leurs valeurs dans $\mathbb{N}^\star$. Si X est une telle variable pour laquelle $\mathbb{P}(X = k)$ est noté p_k, on dit qu'elle est d'entropie finie si la série $\sum p_k \ln(p_k)$ est absolument convergente et on définit alors son entropie par

$$H(X) = -\sum_{k=1}^{+\infty} p_k \ln(p_k)$$

en convenant à nouveau que $p_k \ln(p_k)$ vaut 0 lorsque $p_k = 0$.

II.B.1) Pour $p \in]0, 1[$, X_1 est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.
Rappeler les valeurs de $\mathbb{P}(X_1 = k)$ et de l'espérance de X_1 (aucune démonstration n'est demandée).
Démontrer que X_1 est d'entropie finie et que $H(X_1) = -\dfrac{1-p}{p} \ln(1-p) - \ln(p)$.

II.B.2) Dans cette question et la suivante, X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$ d'espérance finie.
On note $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k p_k$. On se propose de démontrer que X est d'entropie finie.

(a) Quelle est la limite de p_k lorsque k tend vers $+\infty$?

(b) En déduire que $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \sqrt{p_k} \ln(p_k) = 0$, puis qu'il existe un entier k_0 tel que $\forall k \geq k_0 \quad 0 \leq -\sqrt{p_k} \ln(p_k) \leq 1$.

(c) Soit $k \geq k_0$. Montrer que
— si $p_k \leq \dfrac{1}{k^3}$, alors $0 \leq -p_k \ln(p_k) \leq \dfrac{1}{k^{3/2}}$;
— si $p_k \geq \dfrac{1}{k^3}$, alors $0 \leq -p_k \ln(p_k) \leq 3 p_k \ln(k)$.

(d) Soit $k \geq 1$. Justifier que $\ln(k) \leq k$, puis que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \left(\frac{1}{k^{3/2}} + 3 p_k \ln(k)\right)$ converge.

(e) Conclure.

II.B.3) Dans cette question, on suppose en plus que $\mathbb{E}(X) \leq 1/p$, p étant un réel de l'intervalle $]0, 1[$. On veut montrer que $H(X) \leq H(X_1)$ (entropie d'une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p dont la valeur a été calculée à la question II.B.1).
Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, on note $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ et $q_k = \mathbb{P}(X_1 = k)$.

(a) Justifier que la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (k-1) p_k$ converge et exprimer sa somme en fonction de $\mathbb{E}(X)$.

(b) Justifier la convergence de la série $\sum p_k \ln(q_k)$ et démontrer que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k \ln(q_k) = \ln(p) + (\mathbb{E}(X) - 1) \ln(1-p).$$

(c) Démontrer que

$$-H(X_1) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} p_k \ln(q_k).$$

(d) En déduire que

$$H(X) - H(X_1) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} p_k \ln\left(\frac{q_k}{p_k}\right)$$

puis que

$$H(X) \leq H(X_1)$$

Indication : On pourra utiliser l'inégalité démontrée dans la question I.B.

Exercice 3 *(E3A PC, exercice 4, 2020).*

1. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq I_n$ et $M \neq \frac{1}{2}I_n$, vérifiant la relation :

$$2M^2 = 3M - I_n.$$

1.1 On note $F = \mathrm{Vect}(I_n, M, M^2)$. Prouver que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k \in F$.
Déterminer la dimension de F et en donner une base.

1.2 Vérifier que F est stable pour la multiplication des matrices.

1.3 Soient $A = M - I_n$ et $B = M - \frac{1}{2}I_n$.
Justifier que $\mathcal{B} = (A, B)$ constitue une base de F.
Déterminer les composantes des matrices AB, BA, A^2 et B^2 dans la base $\mathcal{B}$.

1.4 Déterminer toutes les matrices T de F vérifiant $T^2 = M$.

2. Soit X une variable aléatoire réelle telle que l'on a :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad 2\mathbb{P}(X = n+2) = 3\mathbb{P}(X = n+1) - \mathbb{P}(X = n).$$

2.1 On note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$. Exprimer p_n en fonction de n.
En déduire la loi de la variable aléatoire X.

2.2 Justifier que la variable aléatoire X possède une espérance et une variance et les calculer.
On pourra admettre que si $q \in]-1, 1[$, alors $\sum nq^{n-1}$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$, et que $\sum n(n-1)q^{n-2}$ converge aussi et que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

Exercice 4 *(E3A PC, exercice 1, 2022)***.**
Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1, 2, \ldots, n, \cdots$.
Il ne peut tenter de passer la hauteur $n+1$ que s'il a réussi les sauts de hauteurs $1, 2, \ldots, n$.
En supposant que le sauteur a réussi tous les sauts précédents, la probabilité de succès au n-ième saut est $p_n = \frac{1}{n}$.
Ainsi le premier saut est toujours réussi.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on note S_k l'évènement : « le sauteur a réussi son k-ième saut » et on note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

1° Rappeler sans démonstration la formule des probabilités composées.

2° Rappeler sans démonstration l'expression de la série exponentielle.

3° Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

4° Déterminer $\mathbb{P}([X = 1])$.

5° Justifier que $[X = 2] = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}$. En déduire $\mathbb{P}([X = 2])$.

6° Pour tout entier $n \geq 2$, exprimer l'évènement $[X = n]$ en fonction d'évènements du type S_k.

7° Déterminer la loi de X.

8° Vérifier par **le calcul** que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) = 1$.

9° Montrer que X possède une espérance et la calculer.