DS 3 : samedi 14 octobre

4h sans calculatrice

Le candidat numérotera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1 *(proche du cours et/ou des TDs)*.

1° Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de loi $\mathcal{G}(p)$ où $p \in]0,1[$.

(a) On pose $Z = \max(X,Y)$. Déterminer la loi de Z.

(b) Z est-elle d'espérance finie ? (Penser à majorer Z par ...)

2° Des personnes se transmettent une information. Chaque personne transforme l'information reçue en son contraire avec une probabilité $p \in]0,1[$, et la transmet fidèlement avec la probabilité $q = 1-p$. On note, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, p_n la probabilité que la n-ième personne reçoive l'information non déformée (cela ne signifie pas nécessairement qu'elle la transmettra fidèlement ni que la $(n-1)$-ième personne ai transmis fidèlement le message qu'elle a reçue). Ainsi $p_1 = 1$.
Notons A_n l'évènement « la n-ième personne reçoit l'information non déformée »et B_n l'évènement « la n-ième personne transforme le message qu'elle a reçue ».

(a) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, p_{n+1} en fonction de p_n.

(b) En déduire que la suite (p_n) est arithmético-géométrique [1], puis exprimer p_n en fonction de n et de p.

(c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Que remarque-t-on ?

3° On considère une urne qui contient deux boules noires et une boule rouge dans laquelle on effectue une infinité de tirages successifs et avec remise. On définit E l'évènement « on obtient au moins une boule rouge ». On souhaite calculer $\mathbb{P}(E)$ par trois méthodes différentes, pour cela, on note pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, A_n l'évènement « on obtient la première boule rouge au n-ième tirage », B_n l'évènement « on obtient au moins une boule rouge au cours des n premiers tirages »et C_n l'évènement « on obtient n boules noires au cours des n premiers tirages ».

(a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\mathbb{P}(A_n)$, $\mathbb{P}(C_n)$ et $\mathbb{P}(B_n)$.

(b) Exprimer E à l'aide des évènements A_n, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et en déduire $\mathbb{P}(E)$.

(c) Exprimer E à l'aide des évènements B_n, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et en déduire $\mathbb{P}(E)$.

(d) Exprimer $\overline{E}$ à l'aide des évènements C_n, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et en déduire $\mathbb{P}(E)$.

(e) Que dire de l'évènement E ? Interpréter ce résultat.

Correction :

1° (a) On a vu plusieurs méthodes en TD. On pose $q = 1-p$.
Tout d'abord $Z(\Omega) = \mathbb{N}^\star$. Puis pour $k \in \mathbb{N}^\star$, on a (un max est plus petit que k si et seulement si tous les éléments qui composent ce max sont plus petit que k) : $\mathbb{P}(Z \le k) = \mathbb{P}((X \le k) \cap (Y \le k)) = \mathbb{P}(X \le k)\mathbb{P}(Y \le k)$ (par indépendance de X et Y), or $\mathbb{P}(X \le k) = \sum\limits_{\ell=1}^{k} \mathbb{P}(X = \ell) = \sum\limits_{\ell=1}^{k} q^{\ell-1}p = p\sum\limits_{\ell=0}^{k-1} q^{\ell} = p\dfrac{1-q^k}{1-q} = 1-q^k$, de même $\mathbb{P}(Y \le k) = 1-q^k$. Ainsi $\mathbb{P}(Z \le k) = (1-q^k)^2$.
Or, comme Z est à valeurs entières, on a $\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Z \le k) - \mathbb{P}(Z \le k-1)$, ainsi $\mathbb{P}(Z = k) = (1-q^k)^2 - (1-q^{k-1})^2$.
Alternative : On peut aussi utiliser que : $(Z = k) = (X = k) \cap (Y < k) \bigcup (X < k) \cap (Y = k) \bigcup (X = k) \cap (Y = k)$ (attention à bien avoir des réunions disjointes).

(b) On a $Z = \max(X,Y) \le X+Y$ puisque X et Y sont positifs. Comme X et Y sont d'espérance finie il en va de même pour $X+Y$, on en déduit donc (théorème de comparaison des SATP) que Z est d'espérance finie.

1. au cas où, après simplification, on trouve, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, que $p_{n+1} = (1-2p)p_n + p$

2º (a) D'après l'énoncé, pour tout n, on a $\mathbb{P}(A_n) = p_n$, $\mathbb{P}(B_n) = p$ et que les évènements B_n sont indépendants de tous les autres (en particulier des A_k et des $\overline{A_k}$ pour tout k).
Pour que la $(n+1)$-ième personne reçoive la bonne information il faut soit que la n-ième la reçoive aussi et la transmette bien, soit que la n-ième reçoive la mauvaise information mais se trompe en la transmettant. Ainsi $A_{n+1} = (A_n \cap \overline{B_n}) \cup (\overline{A_n} \cap B_n)$ et la réunion est disjointe, d'où $p_{n+1} = \mathbb{P}(A_n \cap \overline{B_n})) + \mathbb{P}(\overline{A_n} \cap B_n)$. Les évènements A_n et $\overline{B_n}$ étant indépendants, on a $p_{n+1} = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}(\overline{B_n}) + \mathbb{P}(\overline{A_n})\mathbb{P}(\cap B_n)$, d'où $p_{n+1} = (1-p)p_n + p(1-p_n)$. Ainsi $p_{n+1} = (1-2p)p_n + p$

(b) La suite (p_n) est donc arithmético-géométrique. On cherche ℓ tel que $\ell = (1-2p)\ell + p$, ainsi $\ell = \frac{1}{2}$. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $v_n = p_n - \ell$, ainsi $v_{n+1} = (1-2p)p_n + p - \ell = (1-2p)p_n + p - ((1-2p)\ell + p) = (1-2p)(p_n - \ell) = (1-2p)v_n$. La suite (v_n) est donc géométrique de raison $(1-2p)$, on a pour tout $n \geq 1$, $v_n = (1-2p)^{n-1}v_1 = \frac{1}{2}(1-2p)^{n-1}$. On en déduit donc que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-2p)^{n-1}$.

(c) Comme $p \in]0,1[$, on a $1-2p \in]-1,1[$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{1}{2}$. Cette limite est indépendante de p.

3º Notons, pour $i \in \mathbb{N}^\star$, R_i l'évènement « on obtient une boule rouge au n-ième tirage ». Ainsi pour tout k on a $\mathbb{P}(R_k) = \frac{1}{3}$

(a) On a $A_n = \overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \ldots \cap \overline{R_{n-1}} \cap R_n$, donc, par indépendance des évènements, on a $\mathbb{P}(A_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\frac{1}{3}$. L'évènement C_n est l'intersection des $\overline{R_k}$ pour k de 1 à n, on a donc $\mathbb{P}(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Comme $B_n = \overline{C_n}$ on a $\mathbb{P}(B_n) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

(b) On a $E = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$, or les évènements A_n sont deux à deux incompatibles, d'où, par σ-additivité, on a $\mathbb{P}(E) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(A_n) = \dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1.$

(c) On a $E = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B_n$, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $B_n \subset B_{n+1}$, la suite (B_n) est une suite croissante d'évènements, ainsi par continuité croissante $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(B_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 1$ (car $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$).

(d) L'évènement $\overline{E}$ est l'évènement « on obtient que des boules vertes », ainsi $\overline{E} = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} C_n$, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $C_{n+1} \subset C_n$, la suite (C_n) est une suite décroissante d'évènement, d'où, par continuité décroissante, on a $\mathbb{P}(\overline{E}) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} C_n\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\mathbb{P}(C_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ (car $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$). d'où $\mathbb{P}(E) = 1$.

(e) L'évènement E est presque sûr, on est presque sûr d'obtenir, au moins une fois, une boule rouge.

Exercice 2 *(Problème : Entropie au sens de Shannon, d'après* CONCOURS TSI, 2017*)*.

I. **Préliminaire**

I.A Représenter graphiquement la fonction logarithme népérien.

I.B Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\ln(x) \leq x - 1$ et que $\ln(x) = x - 1$ si et seulement si $x = 1$.

I.C Donner une interprétation graphique de ces deux résultats.

I.D Montrer que la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(0) = 0$ et $\forall x \in]0,1]$, $g(x) = x\ln(x)$ est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1]$. Représenter graphiquement la fonction g.

On admet, pour tout $q \in]-1,1[$, que la série $\sum nq^{n-1}$ converge absolument et que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \dfrac{1}{(1-q)^2}$.

II. **Entropie d'une variable aléatoire**

II.A Dans cette sous-partie, toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un même univers fini Ω et prennent leurs valeurs dans $[\![0,n]\!]$.
Si X est une telle variable, on note $p_k = \mathbb{P}(X = k)$. On définit l'entropie de X par :

$$H(X) = -\sum_{k=0}^{n} p_k \ln(p_k)$$

en convenant que $p_k\ln(p_k)$ vaut 0 lorsque $p_k = 0$.

II.A.1) Montrer que $H(X) \geq 0$ et que $H(X) = 0$ si et seulement si X est une variable aléatoire certaine, c'est-à-dire

$$\exists i \in [\![0, n]\!] \quad \text{tel que} \quad p_i = 1 \quad \text{et} \quad \forall j \neq i, \quad p_j = 0.$$

II.A.2) (a) X_0 est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$. Calculer $H(X_0)$.

(b) En appliquant l'inégalité de la question I.B à un nombre réel x bien choisi, démontrer que

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \qquad -p_k \ln(p_k) + p_k \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} - p_k.$$

(c) En déduire que $H(X) \leq H(X_0)$ avec égalité si et seulement si X suit la même loi que X_0 (pour le cas d'égalité on pourra utiliser le cas d'égalité de la question I.B).

II.B Dans cette sous-partie, on s'intéresse à des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et prenant leurs valeurs dans $\mathbb{N}^\star$. Si X est une telle variable pour laquelle $\mathbb{P}(X = k)$ est noté p_k, on dit qu'elle est d'entropie finie si la série $\sum p_k \ln(p_k)$ est absolument convergente et on définit alors son entropie par

$$H(X) = -\sum_{k=1}^{+\infty} p_k \ln(p_k)$$

en convenant à nouveau que $p_k \ln(p_k)$ vaut 0 lorsque $p_k = 0$.

II.B.1) Pour $p \in]0, 1[$, X_1 est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.
Rappeler les valeurs de $\mathbb{P}(X_1 = k)$ et de l'espérance de X_1 (aucune démonstration n'est demandée).
Démontrer que X_1 est d'entropie finie et que $H(X_1) = -\dfrac{1-p}{p} \ln(1-p) - \ln(p)$.

II.B.2) Dans cette question et la suivante, X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$ d'espérance finie.
On note $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k p_k$. On se propose de démontrer que X est d'entropie finie.

(a) Quelle est la limite de p_k lorsque k tend vers $+\infty$?

(b) En déduire que $\displaystyle\lim_{k \to +\infty} \sqrt{p_k} \ln(p_k) = 0$, puis qu'il existe un entier k_0 tel que $\forall k \geq k_0 \quad 0 \leq -\sqrt{p_k} \ln(p_k) \leq 1$.

(c) Soit $k \geq k_0$. Montrer que

— si $p_k \leq \dfrac{1}{k^3}$, alors $0 \leq -p_k \ln(p_k) \leq \dfrac{1}{k^{3/2}}$;

— si $p_k \geq \dfrac{1}{k^3}$, alors $0 \leq -p_k \ln(p_k) \leq 3 p_k \ln(k)$.

(d) Soit $k \geq 1$. Justifier que $\ln(k) \leq k$, puis que la série $\displaystyle\sum_{k \geq 1} \left(\frac{1}{k^{3/2}} + 3 p_k \ln(k)\right)$ converge.

(e) Conclure.

II.B.3) Dans cette question, on suppose en plus que $\mathbb{E}(X) \leq 1/p$, p étant un réel de l'intervalle $]0, 1[$. On veut montrer que $H(X) \leq H(X_1)$ (entropie d'une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p dont la valeur a été calculée à la question II.B.1).
Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, on note $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ et $q_k = \mathbb{P}(X_1 = k)$.

(a) Justifier que la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} (k-1) p_k$ converge et exprimer sa somme en fonction de $\mathbb{E}(X)$.

(b) Justifier la convergence de la série $\sum p_k \ln(q_k)$ et démontrer que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k \ln(q_k) = \ln(p) + (\mathbb{E}(X) - 1) \ln(1-p).$$

(c) Démontrer que

$$-H(X_1) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} p_k \ln(q_k).$$

(d) En déduire que

$$H(X) - H(X_1) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} p_k \ln\left(\frac{q_k}{p_k}\right)$$

puis que

$$H(X) \leq H(X_1)$$

Indication : On pourra utiliser l'inégalité démontrée dans la question I.B.

Correction : d'après CENTRALE TSI, 2017

I. I.A

I.B Posons $f : x \mapsto \ln(x) - x + 1$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et pour $x > 0$ on a $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$, ainsi f' est strictement positive sur $]0,1[$ et négative sur $]1,+\infty[$, on a donc que f' est strictement croissante sur $]0,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$, ainsi f admet un maximum en 1 qui est $f(1) = 0$, la stricte monotonie sur ces deux intervalles implique que f est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^\star \setminus \{1\}$. Ce qui montre bien que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\ln(x) \leq x - 1$ et que $\ln(x) = x - 1$ si et seulement si $x = 1$.

I.C La courbe représentative de ln est en dessous de la droite d'équation $y = x - 1$ et ne la touche qu'au point de coordonnée $(1,0)$.

I.D Tout d'abord g est continue sur $]0,1]$ (propriété de ln), et par croissance comparée $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, ainsi g est continue sur $[0,1]$.
On a g dérivable sur $]0,1]$ et pour $x \in]0,1]$, $g'(x) = \ln(x) + 1$ ainsi g' est négative sur $]0,\frac{1}{\mathrm{e}}]$ et positive sur $[\frac{1}{\mathrm{e}},1]$, donc g est décroissante sur $]0,\frac{1}{\mathrm{e}}]$ et croissante sur $[\frac{1}{\mathrm{e}},1]$. De plus $\lim_{x\to 0} g'(x) = -\infty$, donc la courbe représentative de g présente une tangente verticale au point d'abscisse 0 (horizontale au point d'abscisse $\frac{1}{\mathrm{e}}$ et de coefficient directeur 1 au point d'abscisse 1), avec en plus $g(0) = 0$, $g(1/e) = -1/e$ et $g(1) = 0$ on a tout pour tracer le graphe de g (on place ces trois points, les trois tangentes et on relie).

I.E (rajout) Tout d'abord remarquons que si on montre la convergence de $\sum nq^{n-1}$ pour $q \in [0,1[$ on aura la convergence absolue de $\sum nq^{n-1}$ pour $q \in]-1,1[$.
Pour $x \in]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$, on a $S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. La fonction S_n est dérivable sur $]-1,1[$ et pour $x \in]-1,1[$ on a, d'une part que $dsS_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ et d'autre part que $S_n'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x)-(1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(1-x)^2}$. Ainsi la série $\sum nq^{n-1}$ converge (la convergence est absolue d'après la remarque en début de question) et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.

Remarque : Plus tard (dans le chapitre sur les Séries entières) on aura un théorème qui nous permettra d'affirmer directement que $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+1[$ et qu'on peut dériver terme à terme.

II. II.A II.A.1) Tout d'abord on remarque que $H(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} -g(p_k)$ (la valeur de g en 0 intègre la convention) et donc, comme g est définie sur $[0,1]$, que $H(X)$ est bien définie, de plus comme g est négative sur $[0,1]$ on a que $H(X) \geq 0$.
Ainsi (somme de nombres positifs) : $H(X) = 0$ si et seulement si pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $g(p_k) = 0$, en utilisant l'étude de g du préliminaire (g ne s'annule qu'en 0 ou 1) on a donc que : $H(X) = 0$ si et seulement si pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $p_k \in \{0,1\}$. Comme X est une variable aléatoire on a que la somme des p_k vaut 1.
On en déduit donc que si X est certaine alors $H(X) = 0$ et réciproquement que si $H(X) = 0$ alors tous les p_k valent 0 ou 1 et comme la somme des p_k vaut 1, que l'un des p_k vaut 1 et tous les autres valent 0 (si on veut vraiment être rigoureux : s'ils valent tous 0 alors la somme des p_k vaut 0 ce qui est interdit, et si plus que deux valent 1 alors la somme des p_k est plus grande que 2, ce qui est aussi illicite).

II.A.2) (a) Pour cette variable aléatoire on a, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $p_k = \frac{1}{n+1}$, ainsi $H(X_0) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = \ln(n+1)$.

(b) Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Si $p_k = 0$ alors l'inégalité est vérifiée, on suppose donc $p_k \neq 0$. On applique l'inégalité de I.B à $x = \frac{1}{(n+1)p_k}$ on a $\ln\left(\frac{1}{(n+1)p_k}\right) \leq \frac{1}{(n+1)p_k} - 1$. Comme $\ln\left(\frac{1}{(n+1)p_k}\right) = \ln\left(\frac{1}{(n+1)}\right) - \ln(p_k)$ et en multipliant l'inégalité par $p_k > 0$ on en déduit que $p_k\left(\ln\left(\frac{1}{(n+1)}\right) - \ln(p_k)\right) \leq \frac{1}{(n+1)} - p_k$, c'est-à-dire $-p_k\ln(p_k) + p_k \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} - p_k$.

(c) En sommant l'inégalité de la question précédente pour k allant de 0 à n on en déduit que $H(x) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{n+1} - p_k\right)$. Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{n+1}\right)\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k = \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\ln(n+1)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{n+1} - p_k\right) = 1 - 1 = 0$. On

en déduit donc : $H(X) - \ln(n+1) \leq 0$ ie $H(X) \leq H(X_0)$.
Or, d'après le cas d'égalité de I.B, on a égalité si et seulement si, pour tout k, on a $\frac{1}{(n+1)p_k} = 1$, ie $p_k = \frac{1}{n+1}$, ce qui montre bien qu'on a égalité ssi X suit la même loi que X_0.

II.B II.B.1) On a $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^\star$ et, pour $k \in \mathbb{N}^\star$, $\mathbb{P}(X_1 = k) = (1-p)^{k-1}p$. De plus $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$.
Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, $p_k \ln(p_k) = (1-p)^{k-1}p\ln((1-p)^{k-1}p) = (1-p)^{k-1}p\left((k-1)\ln(1-p) + \ln(p)\right) = (k-1)(1-p)^{k-1}p\ln(1-p) + p\ln(p)(1-p)^{k-1}$.
On a donc, en posant $q = 1-p$, $p_k\ln(p_k) = \alpha(k-1)q^{k-2} + \beta q^{k-1}$ où $\alpha = qp\ln(q)$ et $\beta = p\ln(p)$.
Or, d'après la question I.E, $\sum(k-1)q^{k-2}$ converge absolument (il en va de même pour $\sum q^{k-1}$).
On en déduit donc que $\sum -p_k\ln(p_k)$ converge absolument, de plus : $H(X_1) = -\alpha\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)q^{k-2} - \beta\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} = -\alpha\sum_{k=0}^{+\infty} kq^k - \beta\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = -\alpha\frac{1}{(1-q)^2} - \beta\frac{1}{1-q} = -\frac{1-p}{p}\ln(1-p) - \ln(p)$.

II.B.2) (a) On sait que $\sum p_k$ converge (et sa somme vaut 1), donc $\lim\limits_{k\to+\infty} p_k = 0$.

(b) Par croissance comparée : $\sqrt{p_k}\ln(p_k) = 2\sqrt{p_k}\ln(\sqrt{p_k}) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ainsi par définition de la limite avec $\varepsilon = 1$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, $\left|\sqrt{p_k}\ln(p_k) - 0\right| \leq 1$, ie $-1 \leq \sqrt{p_k}\ln(p_k) \leq 1$, comme $\ln(p_k)$ est négatif, on en déduit que pour tout $k \geq k_0$, $0 \leq -\sqrt{p_k}\ln(p_k) \leq 1$.

(c) — si $p_k \leq \dfrac{1}{k^3}$, alors, en multipliant l'inégalité de la question précédente par $\sqrt{p_k}$, on a $0 \leq -p_k\ln(p_k) \leq \sqrt{p_k}$, et comme $\sqrt{p_k} \leq \frac{1}{k^{3/2}}$, on en déduit que $0 \leq -p_k\ln(p_k) \leq \dfrac{1}{k^{3/2}}$;
— si $p_k \geq \dfrac{1}{k^3}$, alors (croissance de ln) $\ln(p_k) \geq \ln\left(\frac{1}{k^3}\right) = -3\ln(k)$, ainsi $0 \leq -p_k\ln(p_k) \leq 3p_k\ln(k)$.

(d) Pour $k \geq 1$, d'après I.B, on a $\ln(k) \leq k-1 \leq k$, ainsi $3p_k\ln(k) \leq 3kp_k$, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum 3p_k\ln(p_k)$ converge (le membre de droite de la majoration est le terme général d'une série convergente puisque X est d'espérance finie), de plus on sait que la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^{3/2}}$ de paramètre $3/2 > 1$ converge. On en déduit que que la série $\sum_{k\geq 1}\left(\dfrac{1}{k^{3/2}} + 3p_k\ln(k)\right)$ converge.

(e) On a, d'après II.B.2.(c), pour $k \geq k_0$, $0 \leq -p_k\ln(p_k) \leq \frac{1}{k^{3/2}} + 3p_k\ln(k)$, le théorème de comparaison des séries à termes positifs et la question précédente permet d'en déduire que $\sum -p_k\ln(p_k)$ converge (et même absolument), ie que X est d'entropie finie.

II.B.3) (a) On sait que $\sum p_k$ converge (et sa somme vaut 1) et que $\sum kp_k$ converge (X est d'espérance finie, la somme de cette série vaut $\mathbb{E}(X)$). Ainsi la série $\sum(k-1)p_k$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)p_k = \sum_{k=1}^{+\infty} kp_k - \sum_{k=1}^{+\infty} p_k = \mathbb{E}(X) - 1$.

(b) Comme, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $q_k = p(1-p)^{k-1}$, on a $p_k\ln(q_k) = (k-1)p_k\ln(1-p) + p_k\ln(p)$. Or on sait que $\sum(k-1)p_k$ et $\sum p_k$ convergent, on en déduit donc que $\sum p_k\ln(q_k)$ converge et que $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k\ln(q_k) = \ln(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)p_k + \ln(p)\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = \ln(1-p)(\mathbb{E}(X)-1) + \ln(p)$.

(c) Par hypothèse, $\mathbb{E}(X) - 1 \leq \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$, ainsi ($\ln(1-p)$ négatif) : $\ln(1-p)(\mathbb{E}(X)-1) \geq \frac{1-p}{p}\ln(1-p)$, et donc $\ln(1-p)(\mathbb{E}(X)-1) + \ln(p) \geq \frac{1-p}{p}\ln(1-p) + \ln(p)$, ce qui montre (avec la question précédente et II.B.1) que $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k\ln(q_k) \geq -H(X_1)$.

(d) Par définition de $H(X)$ et en utilisant l'inégalité de la question précédente (et que toutes les sommes misent en jeu sont bien convergentes) : $H(X) - H(X_1) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} p_k\ln(p_k) - \sum_{k=1}^{+\infty} p_k\ln(q_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} p_k\ln\left(\dfrac{q_k}{p_k}\right)$.
Or, d'après la question I.B on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\ln\left(\frac{q_k}{p_k}\right)$, ainsi (les séries misent en jeu

sont bien convergentes) : $H(X) - H(X_1) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} q_k - p_k = 1 - 1 = 0$, ce qui montre bien que $H(X) \leq H(X_1)$.

Exercice 3 *(E3A PC, exercice 4, 2020).*

1. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq I_n$ et $M \neq \frac{1}{2} I_n$, vérifiant la relation :

$$2M^2 = 3M - I_n.$$

1.1 On note $F = \mathrm{Vect}(I_n, M, M^2)$. Prouver que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k \in F$.
Déterminer la dimension de F et en donner une base.

1.2 Vérifier que F est stable pour la multiplication des matrices.

1.3 Soient $A = M - I_n$ et $B = M - \frac{1}{2} I_n$.
Justifier que $\mathcal{B} = (A, B)$ constitue une base de F.
Déterminer les composantes des matrices AB, BA, A^2 et B^2 dans la base $\mathcal{B}$.

1.4 Déterminer toutes les matrices T de F vérifiant $T^2 = M$.

2. Soit X une variable aléatoire réelle telle que l'on a :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad 2\mathbb{P}(X = n + 2) = 3\mathbb{P}(X = n + 1) - \mathbb{P}(X = n).$$

2.1 On note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$. Exprimer p_n en fonction de n.
En déduire la loi de la variable aléatoire X.

2.2 Justifier que la variable aléatoire X possède une espérance et une variance et les calculer.
On pourra admettre que si $q \in]-1, 1[$, alors $\sum nq^{n-1}$ converge et que $\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$, et que $\sum n(n-1)q^{n-2}$ converge aussi et que $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

Correction :

1. 1.1 Montrons par récurrence double sur $k \in \mathbb{N}$ que $M^k \in F$.
Initialisation : par construction de F on a $M^0 = I_n$ et $M^1 = M$ dans F (et même M^2), ainsi la propriété est vrai au rang 0 et 1.
Hérédité : on suppose la propriété au rang k et $k - 1$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^\star$, ie on suppose $M^k \in F$ et $M^{k-1} \in F$.
On a $M^{k+1} = M^2 M^{k-1} = (\frac{3}{2} M - \frac{1}{2} I_n) M^{k-1} = \frac{3}{2} M^k - \frac{1}{2} M^{k-1} \in F$ (par hypothèse de récurrence et car F est un ev).
On a bien montré par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k \in F$.
Comme M^2 est combinaison linéaire de M et de I_n, on en déduit que $F = \mathrm{Vect}(I_n, M)$. Montrons que (I_n, M) est une famille libre, procédons par l'absurde :
On suppose que M et I_n sont liés, comme $I_n \neq 0$, on aurait l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda I_n$. En injectant dans le relation vérifiée par M on en déduit que $2\lambda^2 I_n = 3\lambda I_n - I_n$, ainsi $(2\lambda^2 - 3\lambda + 1) I_n = 0$, donc $2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$, ce qui implique que $\lambda = 1$ ou $\lambda = \frac{1}{2}$, or ces deux possibilités sont exclus. Ainsi (I_n, M) est une famille libre, comme elle est génératrice de F c'est donc une base de F. En particulier $\dim(F) = 2$.

1.2 Soit $(N, N') \in F^2$, il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2$ tels que $N = \alpha I_n + \beta M$ et $N' = \alpha' I_n + \beta' M$, on en déduit donc que $NN' = \alpha\alpha' I_n + (\alpha\beta' + \alpha'\beta) M + \beta\beta' M^2 \in F$ (par définition initiale de F), ainsi F est stable par produit.

1.3 Tout d'abord on remarque que A et B sont dans F, montrons maintenant que (A, B) est une famille libre.
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha A + \beta B = 0$, ainsi $\alpha(M - I_n) + \beta(M - \frac{1}{2} I_n) = 0$, ie $(\alpha + \beta) M + (-\alpha - \frac{1}{2}\beta) I_n = 0$, comme la famille (M, I_n) est libre, on en déduit que $\alpha + \beta = 0$ et $-\alpha - \frac{1}{2}\beta = 0$, donc $\alpha = \beta = 0$. La famille (A, B) est donc une famille libre de F, comme elle est constituée de deux vecteurs et comme F est de dimension 2, on en déduit que (A, B) est une base de F.
On a $AB = (M - I_n)(M - \frac{1}{2} I_n) = M^2 - \frac{3}{2} M + \frac{1}{2} = 0$, de même $BA = 0$.
On a $A^2 = M^2 - 2M + I_n = \frac{3}{2} M - \frac{1}{2} I_n - 2M + I_n = \frac{-1}{2} M + \frac{1}{2} I_n = \frac{-1}{2} A$.
On a $B^2 = M^2 - M + \frac{1}{4} I_n = \frac{3}{2} M - \frac{1}{2} I_n - M + \frac{1}{4} I_n = \frac{1}{2} M - \frac{1}{4} I_n = \frac{1}{2} B$.

1.4 Soit $T \in F$, il existe donc $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $T = \alpha A + \beta B$. Ainsi $T^2 = \alpha^2 A^2 + \alpha\beta AB + \beta\alpha BA + \beta^2 B = \frac{1}{2}(-\alpha^2 A + \beta^2 B)$. Or $M = -A + 2B$, ainsi on a l'équivalence (la deuxième c'est car (A, B) base de F) : $T^2 = M \iff \frac{1}{2}(-\alpha^2 A + \beta^2 B) = -A + 2B \iff \begin{cases} -\alpha^2/2 & = -1 \\ \beta^2/2 & = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha^2 & = 2 \\ \beta^2 & = 4 \end{cases}$.
Ainsi l'équation $T^2 = M$ possède 4 solutions : $\sqrt{2}A + 2B$, $\sqrt{2}A - 2B$, $-\sqrt{2}A + 2B$ et $-\sqrt{2}A - 2B$

2. 2.1 On remarque tout de suite que p_n est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, en effet pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $2p_{n+2} = 3p_{n+1} - p_n$.
Son équation caractéristique $2r^2 - 3r + 1 = 0$ admet deux racines 1 et $\frac{1}{2}$. Ainsi il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $p_n = \frac{\alpha}{2^n} + \beta$.
Comme on sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_n = 1$ (X est une variable aléatoire), et comme on sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, on en déduit que $\alpha = 2$ et $\beta = 0$.
On a donc montré : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2^{n+1}}$.

2.2 Avec le rajout (série géométrique dérivée), on a tout de suite que $\sum n\mathbb{P}(X = n)$ converge absolument et $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{4}\frac{1}{(1-1/2)^2} = 1.$
On en déduit aussi tout de suite que $\sum n(n-1)\mathbb{P}(X = n)$ converge absolument et $\mathbb{E}(X(X-1)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{8}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\frac{1}{2^{k-2}} = \frac{1}{8}\frac{2}{(1-1/2)^3} = 2.$
Ainsi X^2 est d'espérance finie et $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) = 3$. On en conclue ensuite que X possède une variance, la formule de Koenig-Huygens donne $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 3 - 1 = 2$.

Exercice 4 *(*E3A PC*, exercice 1, 2022)*.
Un sauteur tente de franchir des hauteurs successives numérotées $1, 2, \ldots, n, \cdots$.
Il ne peut tenter de passer la hauteur $n + 1$ que s'il a réussi les sauts de hauteurs $1, 2, \ldots, n$.
En supposant que le sauteur a réussi tous les sauts précédents, la probabilité de succès au n-ième saut est $p_n = \frac{1}{n}$.
Ainsi le premier saut est toujours réussi.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on note S_k l'évènement : « le sauteur a réussi son k-ième saut » et on note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

1° Rappeler sans démonstration la formule des probabilités composées.

2° Rappeler sans démonstration l'expression de la série exponentielle.

3° Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X.

4° Déterminer $\mathbb{P}([X = 1])$.

5° Justifier que $[X = 2] = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}$. En déduire $\mathbb{P}([X = 2])$.

6° Pour tout entier $n \geq 2$, exprimer l'évènement $[X = n]$ en fonction d'évènements du type S_k.

7° Déterminer la loi de X.

8° Vérifier par **le calcul** que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n]) = 1$.

9° Montrer que X possède une espérance et la calculer.

Correction :

1° Formule des probabilités composées : Pour tous évènements $A_1, \ldots, A_n$ tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$, on a :
$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\ldots\mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

2° On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

3° Les valeurs prises par X sont les entiers naturels non nuls : $X(\Omega) = \mathbb{N}^\star$ (à ce stade c'est plutôt $X(\Omega) = \mathbb{N}^\star \cup \{+\infty\}$, c'est la question 8° qui permet de dire que $\mathbb{N}^\star$ convient).

4° On a $\mathbb{P}([X = 1]) = \mathbb{P}(S_1 \cap \overline{S_2}) = \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}(\overline{S_2}|S_1) = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

5° L'évènement $[X = 2]$ est réalisé si et seulement si les deux premiers sauts ont été réussis, et le troisième a été raté. Autrement dit : $[X = 2] = S_1 \cap S_2 \cap \overline{S_3}$.
Par conséquent d'après la FPC, on a : $\mathbb{P}([X = 2]) = \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}(S_2|S_1)\mathbb{P}(\overline{S_3}|S_1 \cap S_2) = 1 \times \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$.

6° Tout comme à la question 5°, on a $[X = n] = S_1 \cap \cdots \cap S_n \cap \overline{S_{n+1}}$.

7° D'après la FPC, on a $\mathbb{P}([X = n]) = \mathbb{P}(S_1)\mathbb{P}(S_2|S_1)\dots\mathbb{P}(S_n|S_1 \cap \cdots \cap S_{n-1})\mathbb{P}(\overline{S_{n+1}}|S_1 \cap \cdots \cap S_n) = 1 \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{n} \times \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)(n-1)!}$.

8° On a : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}([X = n]) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)-1}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}$ (car les deux séries misent en jeux convergent). Ainsi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}([X = n]) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1$.

9° Pour montrer que X est d'espérance finie, on doit montrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}([X = n])$ converge absolument.

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $n\mathbb{P}(X = n) = \frac{n}{(n+1)(n-1)!} = \frac{(n+1)-1}{(n+1)(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n+1)(n-1)!}$. Or $\displaystyle\sum \frac{1}{(n-1)!}$ et $\displaystyle\sum \frac{1}{(n+1)(n-1)!} = \sum \mathbb{P}([X = n])$ sont deux séries convergentes , donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n\mathbb{P}([X = n])$ convergente absolument, ainsi X possède une espérance et, en reconnaissant la série exponentielle (cf 2°) et la série de la question 8°, on trouve $\displaystyle\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n-1)!} \mathrm{e} - 1$.