DS 4 : samedi 2 décembre

4h sans calculatrice

Le candidat numérotera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 *(proche du cours et/ou des TDs).*

1° On considère l'application f définie sur $E = \mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = (3x+4z, -2x-y-2z, -2x-3z)$.

(a) Donner la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
(b) Déterminer le noyau de f, puis en déduire son image.
(c) Déterminer les réels λ tels que $\det(M-\lambda I_3) = 0$. On note λ_1 et λ_2 les deux réels trouvés.
(d) Déterminer, pour $i \in \{1,2\}$, les sev $E_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id})$ (on en donnera des bases).
(e) Montrer que $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$
(f) Donner la matrice D de f dans une base "sympathique".
(g) Reconnaitre l'application linéaire f.
(h) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner explicitement M^n.

2° Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on considère la matrice $C_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $C_n = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & & \vdots \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 3 & 0 \\ \vdots & & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ et on pose $c_n = \det(C_n)$.

(a) Calculer c_1 et c_2.
(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminer une relation de récurrence entre c_{n+2}, c_{n+1} et c_n.
(c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, l'expression de c_n en fonction de n.

3° Étudier la convergence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t)\sin t\,\mathrm{d}t$.

4° Justifier de l'éventuelle existence des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$;
(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$;
(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(t+1)}$.

Exercice 2 *(Intégrale de Gauss d'après E3A PSI 2012).*

1° Étudier la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

2° Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$ si $|x| < \sqrt{n}$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

(a) Donner, sur un même schéma, l'allure des représentations graphiques de f_1 et f_4.
(b) Étudier la convergence pour tout réel x de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ on notera $f(x)$ la limite éventuelle.
(c) Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ et si u est un réel strictement supérieur à $-n$ alors $\left(1+\frac{u}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^u$.
(d) Prouver l'existence de $u_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.
(e) **On admet** (les 5/2 peuvent le démontrer) que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

3° On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $J_k = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^k(t)\mathrm{d}t$.

(a) Calculer J_0, J_1 et J_2.

(b) Trouver une relation de récurrence reliant J_k et J_{k+2}.

(c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_{2n+1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$.

(d) En déduire une expression de J_{2n+1} faisant intervenir $(n!)^2$ et $(2n+1)!$.

(e) Rappeler la formule de Stirling et déduire de ce qui précède un équivalent de J_{2n+1} lorsque $n \to +\infty$.

4° À l'aide d'un changement de variable[1], donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation simple entre J_{2n+1} et u_n.

5° En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

Exercice 3 *(Problème d'algèbre linéaire :* BANQUE PT 2017 *Maths A (sans la partie 3)).*
Pour tous entiers strictement positifs n, p, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

Pour une matrice A, ${}^tA$ désigne sa matrice transposée

Partie I

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1° On pose $P_A(X) = \det(XI_3 - A)$, déterminer les deux racines de ce polynôme P_A.
Déterminer (ie trouver des bases) les deux sous espaces $\ker(A - \lambda I_3)$ où λ est une racine de P_A.[2].

2° Des trois vecteurs trouvés à la question précédente, en déduire une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale à déterminer.[3].

3° Déterminer une relation entre A^2, A et I_n.
En déduire une relation entre A^{n+1}, A^n et A^{n-1} pour tout entier $n \geq 1$.

4° Montrer par récurrence qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n \end{pmatrix}$$

qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall n \geq 1, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1} \\ v_{n+1} = v_n + 2v_{n-1} \end{cases}$$

5° Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

Partie II

Dans toute cette partie, on se fixe un entier $n \geq 1$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose qu'il existe deux matrices U, V de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et deux réels λ et μ tels que $\lambda\mu \neq 0$ et $\lambda \neq \mu$ vérifiant :

$$A = \lambda U + \mu V \tag{1}$$
$$A^2 = \lambda^2 U + \mu^2 V \tag{2}$$
$$A^3 = \lambda^3 U + \mu^3 V. \tag{3}$$

1° Exprimer U et V en fonction de A et A^2.
En déduire que

$$A^3 = (\lambda + \mu)A^2 - \lambda\mu A.$$

2° Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$,

$$A^p = \lambda^p U + \mu^p V.$$

3° Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique. On note $f^p = f \circ \cdots \circ f$ la $p^{\text{ième}}$ composée de f. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Indication : $x \mapsto \arcsin(x/\sqrt{n})$
2. La question était : Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A
3. La question était : Montrer que la matrice A est diagonalisable

a) Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^p$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lambda\mu f^{p-1}(x) = (\lambda+\mu) f^p(x) - f^{p+1}(x).$$

c) En déduire que $\operatorname{Ker} f^p \subset \operatorname{Ker} f$.

d) Montrer que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^p)$.

Exercice 4 ***(Intégration d'après** E3A PC**, Maths B,** 2010**).***

1° a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$.

b) Soit $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^2} - \dfrac{1}{x}$.

(i) Montrer que f admet un prolongement continue sur $\mathbb{R}$; on notera φ ce prolongement.

(ii) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2° On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2}\mathrm{d}x$.

a) Montrer que I existe.

b) Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^\star$, on pose : $I(a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin^3(x)}{x^2}\mathrm{d}x$.

i) Montrer, et justifier leur convergence, que : $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\sin(3x)}{x^2}\mathrm{d}x = 3\int_{3a}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x$.

ii) Montrer qu'il existe deux constantes C et D que l'on déterminera telles que : $I(a) = C\displaystyle\int_a^{3a} \varphi(x)\mathrm{d}x + D$ où φ est la fonction définie en 1° b)i).

iii) En déduire la valeur de I.

Exercice 5 ***(calcul d'intégrales généralisées).***

On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\mathrm{d}t$.

1° (a) Montrer que $\ln(\sin(t)) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$.

(b) En déduire la convergence de I.

2° Déterminer un changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissant afin de montrer que $I = J$.

3° Après avoir rappelé la formule de duplication du sinus (ie. $sin(2a) = \ldots$), montrer que (on pourra utiliser le changement de variable $u = 2t$) : $I + J = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u - \frac{\pi}{2}\ln(2)$.

4° Montrer, à l'aide du changement de variable $v = \pi - u$, que $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(v))\mathrm{d}v$.

5° En déduire I.