DS 4 : samedi 2 décembre

4h sans calculatrice

Le candidat numérotera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1 *(proche du cours et/ou des TDs)*.

1° On considère l'application f définie sur $E=\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z)=(3x+4z,-2x-y-2z,-2x-3z)$.

(a) Donner la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer le noyau de f, puis en déduire son image.

(c) Déterminer les réels λ tels que $\det(M-\lambda I_3)=0$. On note λ_1 et λ_2 les deux réels trouvés.

(d) Déterminer, pour $i\in\{1,2\}$, les sev $E_{\lambda_i}=\mathrm{Ker}(f-\lambda_i\mathrm{Id})$ (on en donnera des bases).

(e) Montrer que $E=E_{\lambda_1}\oplus E_{\lambda_2}$

(f) Donner la matrice D de f dans une base "sympathique".

(g) Reconnaitre l'application linéaire f.

(h) Pour $n\in\mathbb{N}$, donner explicitement M^n.

2° Pour $n\in\mathbb{N}^\star$ on considère la matrice $C_n\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $C_n=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & \dots & 0\\ 2 & 5 & 3 & 0 & & \vdots\\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 3 & 0\\ \vdots & & 0 & 2 & 5 & 3\\ 0 & \dots & \dots & 0 & 2 & 5\end{pmatrix}$ et on pose $c_n=\det(C_n)$.

(a) Calculer c_1 et c_2.

(b) Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, déterminer une relation de récurrence entre c_{n+2}, c_{n+1} et c_n.

(c) En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, l'expression de c_n en fonction de n.

3° Étudier la convergence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-t)\sin t\,\mathrm{d}t$.

4° Justifier de l'éventuelle existence des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\sin t\exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$;

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$;

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(t+1)}$.

Correction :

1° (a) $M=\begin{pmatrix}3 & 0 & 4\\ -2 & -1 & -2\\ -2 & 0 & -3\end{pmatrix}$.

(b) On trouve $\ker(f)=\{0\}$, on en déduit $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^3$ et que f est un isomorphisme.

(c) On cherche λ tel que $\det(M-\lambda I_3)=0$, le polynôme caractéristique est $\chi_M(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$. Ainsi $\mathrm{Sp}(f)=\{\pm1\}$.

(d) On trouve $E_1=\mathrm{Vect}(a)$ et $E_{-1}=\mathrm{Vect(b,c)}$ où $a=(2,-1,-1)$, $b=(1,0,-1)$ et $c=(0,1,0)$

(e) Soit $x \in E_1 \cap E_{-1}$, on a $f(x) = x$ et $f(x) = -x$, ainsi $x = -x$, ie. $2x = 0$, ce qui montre bien que $x = 0$. On a montré que $E_1 \cap E_{-1} = \{0\}$. De plus E_1 est de dimension 1 et E_{-1} est de dimension 2, comme $1 + 2 = 3$ il en résulte que : $E = E_1 \oplus E_{-1}$

(f) (a, b, c) est la base sympathique (base par concaténation de bases de deux sev supplémentaires) et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(g) C'est la symétrie par rapport à E_1 et parallèlement à E_{-1}

(h) On a : $M = PDP^{-1}$, ainsi $M^n = PD^nP{-}1$. Or D^n vaut I_3 si n est pair et D si n est impair, on a donc $M^n = I_3$ si n est pair et $M^n = M$ si n est impair.
Remarque : C'est une symétrie, c'est donc normal d'avoir $M^2 = I_3$, les autres puissances suivent.

2° (a) On trouve $c_1 = 5$ et $c_2 = 25 - 6 = 19$.

(b) On développe par rapport à la dernière colonne puis par rapport à la dernière ligne ce qui donne $c_{n+2} = 5c_{n+1} - 6c_n$

(c) Ainsi (c_n) est suite récurrente linéaire d'ordre 2, son équation caractéristique est $X^2 - 5X + 6$ qui admet 2 et 3 comme racine, ainsi il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $c_n = \alpha 3^n + \beta 2^n$, or les valeurs calculées en a) donnent : $3\alpha + 2\beta = 5$ et $9\alpha + 4\beta = 19$, on en déduit donc que $3\alpha = 9$ et $-2\beta = 4$, ie $(\alpha, \beta) = (3, -2)$, on en déduit donc que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, c_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

3° L'intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$, or pour tout t, $|\exp(-t)\sin t| \leq \mathrm{e}^{-t}$, comme $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge l'intégrale converge. Pour le calcule on procède par double IPP (on a convergence des crochets : à rédiger proprement), et on trouve $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t)\sin t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. On peut aussi remarquer que $\frac{-1}{2}(\cos(t) + \sin(t))\exp(-t)$ est une primitive de ce qui est sous l'intégrale.

4° (a) La fonction $t \mapsto \sin t \exp(-t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$, ainsi l'intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$ et $-\infty$. Cette fonction étant impaire on peut se contenter d'étudier l'intégrabilité en $+\infty$.
Étude en $+\infty$: On a, pour $t \geq 1$, $|\sin(t)\mathrm{e}^{-t^2}| \leq \mathrm{e}^{-t^2} \leq \mathrm{e}^{-t}$, or $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente. L'intégrale est donc absolument convergente donc convergente. On a aussi la convergence en $-\infty$ par parité.

(b) C'est une intégrale de Bertrand divergente. Attention toutefois, les intégrales (comme les séries) de Bertrand étant HP, il faut le démontrer.
La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{\sqrt{t}}$ est continue sur $[1, +\infty[$, l'intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$. De plus $\dfrac{1}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}\right)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann divergente, il en va de même pour $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

(c) La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}$ est continue sur $]0, +\infty[$, l'intégrale n'est donc généralisée qu'en 0 et en $+\infty$.
En $+\infty$, on a $\frac{1}{\sqrt{t}(t+1)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3/2}}$, ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(t+1)}$ est convergente par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente (et elle est de signe constant).
En 0, on a $\frac{1}{\sqrt{t}(t+1)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1/2}}$ ainsi $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(t+1)}$ est convergente par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente (et elle est de signe constant).
En conclusion $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(t+1)}$ est convergente

Exercice 2 *(Intégrale de Gauss d'après* E3A *PSI 2012).*

1° Étudier la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

2° Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$ si $|x| < \sqrt{n}$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

(a) Donner, sur un même schéma, l'allure des représentations graphiques de f_1 et f_4.

(b) Étudier la convergence pour tout réel x de la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ on notera $f(x)$ la limite éventuelle.

(c) Montrer que si $n \in \mathbb{N}^*$ et si u est un réel strictement supérieur à $-n$ alors $\left(1 + \frac{u}{n}\right)^n \leq \mathrm{e}^u$.

(d) Prouver l'existence de $u_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

(e) **On admet** (les 5/2 peuvent le démontrer) que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $I = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

3° On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $J_k = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^k(t)\mathrm{d}t$.

(a) Calculer J_0, J_1 et J_2.
(b) Trouver une relation de récurrence reliant J_k et J_{k+2}.
(c) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ J_{2n+1} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+1)}$.
(d) En déduire une expression de J_{2n+1} faisant intervenir $(n!)^2$ et $(2n+1)!$.
(e) Rappeler la formule de Stirling et déduire de ce qui précède un équivalent de J_{2n+1} lorsque $n \to +\infty$.

4° À l'aide d'un changement de variable[1], donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation simple entre J_{2n+1} et u_n.

5° En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

Correction :

1° $x \mapsto \exp(-x^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et paire donc I n'est généralisée qu'en $\pm\infty$. Or $0 < \exp(-x^2) \leq \exp(-x)$ pour $x > 1$ et $x \to \mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc $x \mapsto \exp(-x^2)$ également. La parité permet d'avoir que I converge.

2° (a) On a, pour $x \in]-1, 1[$, que $f_1(x) = 1 - x^2$ sur $]-1, 1[$ donc on représente l'arc de parabole tourné vers le bas avec son sommet en $(0, 1)$ et « passant » par $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ (ces points appartiennent bien à $\mathcal{C}_{f_1}$). De même pour $x \in]-2, 2[$, on a $f_4(x) = (1 - x^2/4)^4$ avec son sommet en $(0, 1)$ ...

(b) On fixe $x \in \mathbb{R}$, pour $n > x^2$ on a $f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)\right) = \exp\left(-x^2 + o(1)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-x^2} = f(x)$.

(c) On considère la fonction $g : v \mapsto \ln(1 + v) - v$ qui est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1, +\infty[$, on a pour $v > -1$ que $g'(v) = \frac{1}{1+v} - 1 = \frac{-v}{1+v}$, ainsi cette fonction g qui est décroissante puis croissante, possède un minimum en 0, comme $g(0) = 0$ on en déduite que : $\forall v > -1,\ \ln(1 + v) \leq v$.
On applique ce résultat à $v = \frac{u}{n}$ où $u > -n$ (ainsi $v > -1$: $\ln(1 + \frac{u}{n}) \leq \frac{u}{n}$, d'où $n\ln(1 + \frac{u}{n}) \leq u$, il ne reste plus qu'à composer par exp (qui est croissante) pour avoir le résultat demandé.

(d) Par définition de f_n, $u_n = \displaystyle\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} f_n(x)\mathrm{d}x$ or, sur $]-\sqrt{n}, \sqrt{n}[$ la fonction f_n est continue et prolongeable par continuité trivialement en $\pm\sqrt{n}$ en posant $f_n(\pm\sqrt{n}) = 0$. Et u_n existe comme intégrale d'une fonction continue sur un segment.

(e) (pour les 5/2) On va utiliser le théorème de convergence dominée :
— Les f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ et (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ elle même continue sur $\mathbb{R}$.
— $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]-\sqrt{n}, \sqrt{n}[$, on a $0 \leq f_n(x) \leq \mathrm{e}^{-x^2}$ (d'après 2°.(c) avec $u = -x^2 > -n$), cet encadrement est vrai pour $x \in \mathbb{R}$, ainsi $|f_n(x)| \leq \mathrm{e}^{-x^2}$ et la fonction dominante est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi le TCD s'applique et donne : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$.

3° (a) On trouve $J_0 = \frac{\pi}{2}$, $J_1 = 1$ et $J_2 = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(\cos(2t) + 1)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$.

(b) Une IPP (on "primitive" cos et on dérive $\cos^{k+1}$) permet de trouver que $J_{k+2} = \frac{k+1}{k+2}J_k$.

(c) Une récurrence immédiate avec la relation précédente compte tenu de $J_1 = 1$.

(d) Le classique déjà vu, on multiplie au numérateur et au dénominateur par $2.4.\ldots.(2n)$: $J_{2n+1} = \dfrac{(2\times 4\times\cdots\times 2n)^2}{(2n+1)!} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

(e) La formule de Stirling assure de $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$. On l'applique deux fois pour avoir :
$$J_{2n+1} \sim \frac{(2n)^{2n}\times 2\pi n\times \mathrm{e}^{2n+1}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2n+1}(2n+1)^{2n+1}\mathrm{e}^{2n}} \sim \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n} \times \frac{\mathrm{e}n\sqrt{2\pi}}{(2n+1)^{3/2}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}.$$
Le dernier équivalent découle de $\left(\dfrac{2n}{2n+1}\right)^{2n} = \exp\left(-2n\ln\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)\right) \to \mathrm{e}^{-1}$.

4° Le changement de variable proposé est licite car il est de classe $\mathcal{C}^1$ **sur** $]-\sqrt{n}, \sqrt{n}[$ et est bijectif. Les nouvelles bornes sont $\displaystyle\lim_{h\to\pm1} \arcsin(h) = \pm\frac{\pi}{2}$ et le nouvel élément différentiel est $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{n}\sqrt{1 - x^2/n}} = \mathrm{d}u$.

D'où $u_n = \displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{n}\sqrt{1 - \sin^2 u}(1 - \sin^2 u)^n\mathrm{d}u = 2\sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(u)\mathrm{d}u = 2\sqrt{n}J_{2n+1}$.

5° Puisque $\lim u_n = I$ alors $2\sqrt{n}J_{2n+1} \sim I$ d'où avec 3.(e) : $I \sim \sqrt{\pi}$ donc $I = \sqrt{\pi}$.

1. Indication : $x \mapsto \arcsin(x/\sqrt{n})$

Exercice 3 *(Problème d'algèbre linéaire :* BANQUE PT 2017 *Maths A (sans la partie 3))***.**
Pour tous entiers strictement positifs n, p, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. I_n désigne la matrice identité d'ordre n.

Pour une matrice A, ${}^tA$ désigne sa matrice transposée

Partie I

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1° On pose $P_A(X) = \det(XI_3 - A)$, déterminer les deux racines de ce polynôme P_A.
Déterminer (ie trouver des bases) les deux sous espaces $\ker(A - \lambda I_3)$ où λ est une racine de P_A. [2].

2° Des trois vecteurs trouvés à la question précédente, en déduire une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale à déterminer. [3].

3° Déterminer une relation entre A^2, A et I_n.
En déduire une relation entre A^{n+1}, A^n et A^{n-1} pour tout entier $n \geq 1$.

4° Montrer par récurrence qu'il existe deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n \end{pmatrix}$$

qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall n \geq 1, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= u_n + 2u_{n-1} \\ v_{n+1} &= v_n + 2v_{n-1} \end{cases}$$

5° Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n et v_n en fonction de n.

Correction :
Remarque : j'ai inversé les questions 1° et 2° par rapport au sujet originel, en effet la matrice étant une matrice symétrique réel, on a directement (via le théorème spectral qu'on verra plus tard) qu'elle est diagonalisable (et même avec une base de diagonalisation orthonormal).

1° Pour calculer le spectre de A on calcule son polynôme caractéristique $P_A(X) = \det(XI_3 - A)$

$$P_A(X) = \det\begin{pmatrix} X-1 & 1 & 1 \\ 1 & X-1 & 1 \\ 1 & 1 & X-1 \end{pmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \det\begin{pmatrix} X+1 & 1 & 1 \\ X+1 & X-1 & 1 \\ X+1 & 1 & X-1 \end{pmatrix}$$
$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \det\begin{pmatrix} X+1 & 1 & 1 \\ 0 & X-2 & 1 \\ 0 & 0 & X-2 \end{pmatrix} = (X+1)(X-2)^2$$

On en déduit que le spectre de A est $\{-1, 2\}$ dont les multiplicités respectives sont $m_1 = 1$ et $m_{-2} = 2$. Le calcul des sous-espaces propres de A donne d'une part $E_{-1}(A) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ et $E_2(A) = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$.

2° Le polynôme caractéristique est scindé et les sous-espaces propres ont bien comme dimension la multiplicité des valeurs propres. La matrice A est donc diagonalisable.

3° Si on note $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, comme $D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D + I_3$, on en déduit que l'on a $A^2 = A + 2I_3$ vu que A est semblable à D (pour être plus précis : soit P la matrice inversible telle que $A = PDP^{-1}$, on multiplie $D^2 = D + 2I_3$ par P à gauche et par P^{-1} à droite et on utilise que $A^2 = PD^2P^{-1}$).
Pour tout entier $n \geq 2$ en multipliant l'identité $A^2 = A + 2I_3$ par A^{n-1} à gauche on obtient la relation $A^{n+1} = A^n + 2A^{n-1}$. Le cas $n = 1$ découle directement de la question précédente.

2. La question était : Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A
3. La question était : Montrer que la matrice A est diagonalisable

4° Pour tout entier $n \geq 0$, on pose (on peut aussi procéder par récurrence double) :

$$\mathcal{P}_n : \forall k \in [\![0, n]\!],\ \exists (u_k, v_k) \in \mathbb{R}^2 \ /\ A^k = \begin{pmatrix} u_k & v_k & v_k \\ v_k & u_k & v_k \\ v_k & v_k & u_k \end{pmatrix}.$$

Démontrons dans un premier temps cette formule par récurrence forte.

- La relation $\mathcal{P}_1$ est vraie en prenant $u_0 = 1$ et $v_0 = 1$ puis $u_1 = 1$, $v_1 = -1$.
- Si on suppose que l'on a un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie, alors $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. En effet, pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n+1$, on a :
  — Si $k \leq n$, cela découle du fait que $\mathcal{P}_n$ est vrai. i
  — Si $k = n+1$, cela découle du fait que l'on a $A^{n+1} = A^n + 2A^{n-1}$ car il vient que

$$\begin{pmatrix} u_n & v_n & v_n \\ v_n & u_n & v_n \\ v_n & v_n & u_n \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} u_{n-1} & v_{n-1} & v_{n-1} \\ v_{n-1} & u_{n-1} & v_{n-1} \\ v_{n-1} & v_{n-1} & u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n + 2u_{n-1} & v_n + 2v_{n-1} & v_n + 2v_{n-1} \\ v_n + 2v_{n-1} & u_n + 2u_{n-1} & v_n + 2v_{n-1} \\ v_n + 2v_{n-1} & v_n + 2v_{n-1} & u_n + 2u_{n-1} \end{pmatrix}$$

  est de la forme voulue en posant $u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$ et $v_{n+1} = v_n + 2v_{n-1}$.

Ce qui montre non seulement l'existence de ces suites, mais aussi les relations de récurrence.

5° On sait que les suites récurrentes linéaires d'ordre deux $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solutions de :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+2} = X_{n+1} + 2X_n$$

forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ de dimension deux dont une base est donnée par les suites $(2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$: on peut donc en déduire qu'il existe quatre réels $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n$ et $v_n = \gamma 2^n + \delta(-1)^n$. La prise en compte des conditions initiales $u_0 = u_1 = 1$ permet de conclure que

$$u_n = \frac{1}{3}\left(2^{n+1} + (-1)^n\right)$$

alors que la contrainte $v_0 = 0,\ v_1 = -1$ permet d'avoir :

$$v_n = \frac{1}{3}\left((-1)^n - 2^n\right).$$

Partie II

Dans toute cette partie, on se fixe un entier $n \geq 1$. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. On suppose qu'il existe deux matrices U, V de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et deux réels λ et μ tels que $\lambda\mu \neq 0$ et $\lambda \neq \mu$ vérifiant :

$$A = \lambda U + \mu V \tag{1}$$

$$A^2 = \lambda^2 U + \mu^2 V \tag{2}$$

$$A^3 = \lambda^3 U + \mu^3 V. \tag{3}$$

1° Exprimer U et V en fonction de A et A^2.
En déduire que

$$A^3 = (\lambda + \mu) A^2 - \lambda\mu A.$$

2° Montrer que, pour tout entier $p \geq 1$,

$$A^p = \lambda^p U + \mu^p V.$$

3° Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont A est la matrice dans la base canonique. On note $f^p = f \circ \cdots \circ f$ la $p^{\text{ième}}$ composée de f. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^p$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lambda\mu f^{p-1}(x) = (\lambda + \mu) f^p(x) - f^{p+1}(x).$$

c) En déduire que $\operatorname{Ker} f^p \subset \operatorname{Ker} f$.

d) Montrer que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^p)$.

Correction :

1° Il suffit de faire $(2)-\lambda(1)$ et $(2)-\mu(1)$ pour obtenir U et V, et comme $\lambda\mu\neq 0$ et $\lambda\neq\mu$ on a $\lambda(\mu-\lambda)\neq 0$ et ainsi :

$$U=\frac{1}{\lambda(\mu-\lambda)}\left(\mu A-A^2\right) \text{ et } V=\frac{1}{\mu(\mu-\lambda)}\left(-\lambda A+A^2\right).$$

Comme enfin $A^3=\lambda^3U+\mu^3V$, on a :

$$A^3=\frac{\lambda^2}{\mu-\lambda}\left(\mu A-A^2\right)+\frac{\mu^2}{\mu-\lambda}\left(-\lambda A+A^2\right)=(\lambda+\mu)A^2+(-\lambda\mu)A$$

2° Procédons par récurrence double

Initialisation c'est initialisé pour $p=1$, $p=2$ (et même $p=3$) par hypothèse.

Hérédité On suppose que pour un certain $p\geq 2$ on a $A^p=\lambda^pU+\mu^pV$ et $A^{p-1}=\lambda^{p-1}U+\mu^{p-1}V$. Montrons le au rang suivant, on a que $A^{p+1}=\lambda^{p+1}U+\mu^{p+1}V$ à montrer.

Comme $p\geq 2$ on a $A^{p+1}=A^{p-2}A^3$ donc d'après la question précédente $A^{p+1}=A^{p-2}\left((\lambda+\mu)A^2-\lambda\mu A\right)=(\lambda+\mu)A^p-\lambda\mu A^{p-1}$, ainsi par hypothèse de récurrence on a $A^{p+1}=(\lambda+\mu)(\lambda^pU+\mu^pV)-\lambda\mu(\lambda^{p-1}U+\mu^{p-1}V)=\lambda^{p+1}U+\mu^{p+1}V$. Ce qui termine l'hérédité

On a bien montré, pour tout $p\in\mathbb{N}^\star$, que $A^p=\lambda^pU+\mu^pV$.

3° a) Soit $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ tel que $f(\vec{x})=\vec{0}$, en prenant la convention standard $f^0=Id_{\mathbb{R}^n}$, on a $f^p(\vec{x})=f^{p-1}(f(\vec{x}))=f^{p-1}(\vec{0})=\vec{0}$. On conclue que

$$\ker f\subset\ker f^p,\ \forall p\in\mathbb{N}^\star.$$

b) C'est une conséquence de la question 2 et du fait que l'application qui à un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associe sa matrice relativement à la base canonique est un isomorphisme qui en plus transforme une composée en produit. Ainsi pour tout $p\in\mathbb{N}^\star$:

$$\forall\vec{x}\in\mathbb{R}^n,\ \lambda\mu f^{p-1}(\vec{x})=(\lambda+\mu)f^p(\vec{x})-f^{p+1}(\vec{x})$$

c) Si $\vec{x}\in\ker f^p$, on a deux cas de figures :

— Si $p=1$, le résultat désiré est immédiat.

— Si $p\geq 2$, on note $p_0\geq 1$ le plus petit entier $p\geq 1$ tel que $f^p(\vec{x})=\vec{0}$: si on avait $p_0>1$, du fait que l'on ait simultanément $f^{p_0}(\vec{x})=f^{p_0+1}(\vec{x})=\vec{0}$ d'après la question 3.a, on aurait une contradiction car la question précédente permet de dire que $\lambda\mu f^{p_0-1}(\vec{x})=\vec{0}$ avec $\lambda\mu\neq 0$. L'absurde vient d'avoir supposé que $p_0>1$.

Dans tous les cas, $f(\vec{x})=\vec{0}$. On en déduit que

$$\ker f^p\subset\ker f$$

d) Si on utilise les questions 3.a et 3.c, on peut déduire que $\ker f=\ker f^p$ pour tout entier $p\geq 1$; on peut donc dire que $\dim\ker f=\dim\ker f^p$ pour tout $p\in\mathbb{N}^\star$ puisque $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie. La formule du rang, donnant pour tout $k\in\mathbb{N}$, $rg(A^k)=\dim Im(f^k)=n-\dim\ker f^k$, l'égalité qu'on vient d'établir permet de conclure que $rg(A)^k=rg(A)$ pour tout $k\in\mathbb{N}^\star$ ce qui est le résultat demandé.

Exercice 4 *(Intégration d'après* E3A PC*, Maths B,* 2010*).*

1° a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\sin(3x)=-4\sin^3(x)+3\sin(x)$.

b) Soit $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ telle que : $\forall x\in\mathbb{R}^\star,\ f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x^2}-\dfrac{1}{x}$.

(i) Montrer que f admet un prolongement continue sur $\mathbb{R}$; on notera φ ce prolongement.

(ii) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2° On pose $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^3(x)}{x^2}\mathrm{d}x$.

a) Montrer que I existe.

b) Pour tout $a\in\mathbb{R}_+^\star$, on pose : $I(a)=\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\sin^3(x)}{x^2}\mathrm{d}x$.

i) Montrer, et justifier leur convergence, que : $\displaystyle\int_a^{+\infty}\frac{\sin(3x)}{x^2}\mathrm{d}x=3\int_{3a}^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x$.

ii) Montrer qu'il existe deux constantes C et D que l'on déterminera telles que : $I(a) = C\displaystyle\int_a^{3a} \varphi(x)\mathrm{d}x + D$ où φ est la fonction définie en 1° b)i).

iii) En déduire la valeur de I.

Correction :

1° a) Pour $x \in \mathbb{R}$ on a : $\sin(3x) = \sin(2x)\cos(x) + \cos(2x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos^2(x) + (\cos^2(x) - \sin^2(x))\sin(x)$ puis $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ et l'on simplifie pour avoir $\sin(3x) = -4\sin^3(x) + 3\sin(x)$.
Alternative : $\sin(3x)$ est la partie imaginaire de $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}$, il ne reste plus qu'à utiliser la formule de Moivre et le binôme de Newton pour avoir $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} = (\cos(x) + \mathrm{i}\sin x)^3 = \cos^3 x + 3\mathrm{i}\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - \sin^3(x)$, ainsi $\sin(3x) = 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x) = 3\sin(x) - 4\sin^3(x)$.

b) i) On sait que $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$, ainsi $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - \frac{1}{x} = -\frac{x}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^2) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Ainsi f se prolonge par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = 0$.

ii) φ est continue sur $\mathbb{R}$ et est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^\star$. Pour $x \neq 0$ on a $\varphi'(x) = \dfrac{\cos(x)x^2 - 2x\sin(x)}{x^4} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x\cos(x) - 2\sin(x) + x}{x^3} = \dfrac{1}{x^3}\left(x(1 - \dfrac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)) - 2(x - \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^4)) + x\right) = -\dfrac{1}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{-1}{6}$.
Ainsi, d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$: φ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(0) = -\frac{1}{6}$.

2° a) $g : x \mapsto \frac{\sin^3(x)}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, elle n'est généralisée qu'en 0 et en $+\infty$.
En 0 : g est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 0$ donc I est faussement généralisée en 0.
Comme, pour $x \geq 1$, $|g(x)| \leq \frac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est l'intégrande d'une intégrale Riemann convergente en $+\infty$, g est intégrable sur $[1, +\infty[$.
Il en résulte que I existe.

b) i) L'intégrale de gauche est convergente par le même raisonnement qu'en a). On lui applique le changement de variable $y = 3x$, affine donc licite, qui mène à une intégrale elle aussi convergente et qui vaut ...celle du membre de droite.

ii) $I(a) = -\dfrac{1}{4}\displaystyle\int_a^{+\infty} \dfrac{\sin(3x)}{x^2}\mathrm{d}x + \dfrac{3}{4}\displaystyle\int_a^{+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ d'après 1° a) et la linéarité pour des intégrales convergentes.
Donc $I(a) = -\dfrac{3}{4}\displaystyle\int_{3a}^{+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x + \dfrac{3}{4}\displaystyle\int_a^{+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ grâce à b) i). D'où $I(a) = \dfrac{3}{4}\displaystyle\int_a^{3a} \dfrac{\sin(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ par la relation de Chasles. Il s'ensuit $\displaystyle\int_a^{3a} \varphi = I(a) - \dfrac{3}{4}\displaystyle\int_a^{3a} \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = I(a) - \dfrac{3}{4}(\ln(3a) - \ln a)$ donc : $I(a) = \dfrac{3}{4}\displaystyle\int_a^{3a} \varphi + \dfrac{3}{4}\ln(3)$, $C = \frac{3}{4}$ et $D = \frac{3}{4}\ln(3)$

iii) Comme φ est continue sur $\mathbb{R}$ elle possède, d'après le théorème fondamental, une primitive Φ, cette dernière est de classe $\mathcal{C}^1$, en particulier continue, ainsi $\lim_{a\to 0}\Phi(a) = \Phi(0)$ et $\lim_{a\to 0}\Phi(3a) = \Phi(0)$, d'où $\displaystyle\lim_{a\to 0}\int_a^{3a} \varphi = 0$ (alternative pour montrer cette limite : utiliser que φ est continue sur $\mathbb{R}$ donc bornée, disons par M, sur $[-3, 3]$, ainsi pour $a \in [-1, 1]$ on a : $\left|\int_a^{3a} \varphi\right| \leq 2|a|M$, ce qui permet de conclure).
On a donc $I = \displaystyle\lim_{a\to 0} I(a) = \dfrac{3}{4}\ln(3)$.

Exercice 5 *(calcul d'intégrales généralisées)*.

On pose $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t))\mathrm{d}t$.

1° (a) Montrer que $\ln(\sin(t)) \underset{t\to 0}{\sim} \ln(t)$.

(b) En déduire la convergence de I.

2° Déterminer un changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissant afin de montrer que $I = J$.

3° Après avoir rappelé la formule de duplication du sinus (ie. $sin(2a) = \ldots$), montrer que (on pourra utiliser le changement de variable $u = 2t$) : $I + J = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u - \dfrac{\pi}{2}\ln(2)$.

4° Montrer, à l'aide du changement de variable $v = \pi - u$, que $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(v))\mathrm{d}v$.

5° En déduire I.

Correction :

1° (a) On a $\ln(\sin(t)) = \ln(t + \underset{t\to0}{o}(t^2)) = \ln(t) + \ln(1 + \underset{t\to0}{o}(t))$. Ainsi $\ln(\sin(t)) \underset{t\to0}{\sim} \ln(t)$.

(b) $t \mapsto \ln(\sin(t))$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, de signe constant (négatif), d'après la règle des équivalents I est donc de même nature que $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ qui converge. Ainsi I est convergente.

2° Le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - u$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissant, ainsi $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{0} -\ln(\sin(\frac{\pi}{2} - u))\mathrm{d}u = J$.

3° On sait que $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. On a $I + J = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x)\cos(x))\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \ln(\frac{1}{2}\sin(2x))\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x)) - \ln(2)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2x))\mathrm{d}x - \frac{\pi}{2}\ln(2)$. On applique le changement de variable $u = 2t$ (qui est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissant) : $I + J = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u - \frac{\pi}{2}\ln(2)$.

4° Le changement de changement de variable $v = \pi - u$ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement décroissant, ainsi on a : $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u))\mathrm{d}u = \int_{\pi/2}^{0} -\ln(\sin(\pi - v))\mathrm{d}v = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(v))\mathrm{d}v = I$.

5° Si on combine 2°, 3° (où on y applique la relation de Chasles dans l'intégrale du membre de droite) et 4° on trouve $2I = \frac{1}{2}(2I) - \frac{\pi}{2}\ln(2)$, ie. $I = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$.