

DS 5 : samedi 13 janvier

4h sans calculatrice

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats, il numérottera aussi ses pages.

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 (*proche du cours et/ou des TDs*).

1° Donner dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (en justifiant) une matrice non diagonalisable mais trigonalisable.

Donner une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas trigonalisable.

2° Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En déduire la valeur de A^n pour $n \in \mathbb{N}$. On donnera explicitement tous les coefficients de A^n .

3° La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable? Trigonalisable? Si oui, le faire.

4° Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau :

x_i	-2	-1	0	1	2	
p_i	1/6	1/4	1/6	1/4	1/6	on pose ensuite $Y = X^2$.

(i) Déterminer la loi du couple (X, Y) puis la loi de Y .

(ii) Déterminer $\text{Cov}(X, Y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 2 (E3A PC 2020 Ex 1).

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1° Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle diagonalisable?

2° Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle inversible?

3° Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable, M_a est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (*sur les matrices compagnon : d'après CCP MP 2001 Maths 2*).

Dans cet exercice \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} , n un entier naturel, et χ_A le polynôme caractéristique de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On considère le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ de $\mathbb{K}_n[X]$ et C_P sa matrice compagnon associée, c'est-à-dire la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(ie la matrice $C_P = (c_{i,j})$ est définie par $c_{i,j} = 1$ pour $i - j = 1$, $c_{i,n} = -a_{i-1}$ et $c_{i,j} = 0$ dans les autres cas).

1° Montrer que C_P est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$.

2° Calculer le polynôme caractéristique de la matrice C_P et déterminer une constante k telle que $\chi_{C_P} = kP$.

3° Soit Q un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\chi_A = Q$.

4° On note C_P^\top la transposée de la matrice C_P .

a) Justifier la proposition : $\text{Sp}(C_P) = \text{Sp}(C_P^\top)$.

b) Soit λ élément de $\text{Sp}(C_P^\top)$, déterminer (ie. l'écrire avec un Vect) le sous-espace propre de C_P^\top associé à λ .

c) Montrer que C_P^\top est diagonalisable si et seulement si P est scindé sur \mathbb{K} et a toutes ses racines simples.

d) On suppose que P admet n racines $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ deux à deux distinctes, montrer que C_P^\top est diagonalisable

et en déduire que le déterminant de VANDERMONDE $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est non nul.

e) (rajout) Question de cours : Donner (sans démonstration) l'expression factorisée du déterminant de VANDERMONDE.

Exercice 4 (E3A MP 2016 *Maths 1 exercice 4*).

Un fabricant de produits d'entretien pour machines à café fournit deux types de produits : un produit détartrant (produit A) et un produit dégraissant (produit B). Ce fabricant vend les produits conditionnés uniquement en boîtes contenant à la fois un produit A et un produit B. Cependant, pour rendre service à ses clients qui n'ont besoin que d'un seul produit, un commerçant accepte de vendre séparément les produits.

Pour la suite, on suppose que chaque client qui se présente chez le commerçant n'effectue qu'un seul achat. On suppose également que les choix (du produit A ou B) des clients sont indépendants. On fait également l'hypothèse qu'il ne reste aucune boîte entamée au début de la journée.

On considère que chaque client qui se présente chez ce commerçant achète le produit A avec la probabilité $p \in]0, 1[$ et le produit B avec la probabilité $1 - p$. On note X (respectivement Y) le nombre de produits A (respectivement de produits B) vendus au cours de la journée. On notera $Z = \max(X, Y)$.

1° On considère une journée où 4 clients se sont présentés. Déterminer la loi de X , la loi de Y et les espérances de ces deux variables aléatoires. Déterminer la loi de Z . Que représente cette variable aléatoire ?

On suppose maintenant que le nombre de personnes se présentant chez le commerçant durant une journée est une variable aléatoire réelle N suivant une loi de Poisson de paramètre λ .

2° Soit n un entier naturel. Quelle est la loi de X sachant que l'évènement $[N = n]$ est réalisé ?

3° Déterminer la loi conjointe du couple (X, N) .

4° En déduire la loi de X . Donner sans calcul les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

5° Démontrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

6° En utilisant la relation $N = X + Y$, calculer $\text{Cov}(X, N)$.

7° Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$S(k, x) = \sum_{j=0}^k \frac{x^j}{j!}$$

Exprimer $\mathbb{P}(Z \leq k)$ en fonction de λ , $S(k, \lambda p)$ et $S(k, \lambda(1 - p))$.

8° On utilise dans cette question le langage de programmation PYTHON.

(a) Définir la fonction $S(k, x)$ qui calcule $S(k, x)$ à partir des valeurs de k et x données.

(b) On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$, $\lambda = 10$ et que le commerçant constate au début de la journée qu'il lui reste exactement 5 boîtes, aucune n'étant entamée. Écrire les instructions permettant d'afficher la probabilité que le commerçant tombe en rupture de stock au cours de la journée.

Exercice 5 (E3A PC 2019 *Maths 1 exercice 4*).

1. **Question de cours 1** : Rappeler sans démonstration l'écriture sous forme de série de $\exp(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$.

2. **Question de cours 2** : Soit $p \in \mathbb{N}$. Prouver que si deux matrices carrées M et N de taille d sont semblables, alors les matrices M^p et N^p sont semblables.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, on pose, lorsque cela est possible, $\varphi(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} =$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1}.$$

3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $s(z) = \frac{1}{2i}[\exp(iz) - \exp(-iz)]$ et $c(z) = \frac{1}{2i}[\exp(iz) + \exp(-iz)]$ où i vérifie $i^2 = -1$.

(a) Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $s(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.

(b) Déterminer une formule analogue pour $c(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

4. Si $A = \gamma I_2$ avec $\gamma \in \mathbb{C}$, déterminer $\varphi(A)$.

5. On suppose que A possède deux valeurs propres distinctes α et β .

(a) Justifier l'existence d'une matrice $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que : $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = P^{-1}AP$.

(b) Déterminer $\varphi(B)$ puis $\varphi(A)$ à l'aide de la matrice P .

6. **On suppose que les valeurs propres de A sont égales : $\beta = \alpha$.**

(a) Justifier l'existence d'une matrice $Q \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$ et d'un nombre complexe y tels que $C = \begin{pmatrix} \alpha & y \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ$.

(b) Calculer C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) En déduire $\varphi(A)$ à l'aide de la matrice Q .

7. Justifier l'existence de $\varphi(A)$ pour toute matrice A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

8. Existe-t-il une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que l'on ait : $\varphi(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?