DS 6 : samedi 10 février

4h sans calculatrice

Le candidat numérotera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 ***(proche du cours et/ou des TDs).***

1° Vrai/Faux Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction f sur un intervalle I. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses (démonstration ou contre-exemple).

(a) Dans le cas $I = \mathbb{R}$, si les f_n sont toutes périodiques de période T alors f est aussi périodique de période T.

(b) Si les f_n sont toutes continues alors f l'est aussi.

2° Déterminer la limite simple des suites de fonctions suivantes, et déterminer si la convergence est uniforme ou non.

(a) $f_n(x) = x^n(1-x)$ sur $[0,1]$

(b) $f_n(x) = x^n(1+x)$ sur $[0,1]$

3° Soit la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

(b) Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$.

(c) Calculer f' (on l'exprimera sans somme) puis en déduire f sur $\mathbb{R}_+^\star$ (on ne cherchera pas a déterminer la constante).

4° Vérifier que $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\mathsf{d}t$ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ (on oubliera pas de justifier l'existence, de $\langle P, Q\rangle$).

5° Dans $\mathbb{R}^3$, orthonormaliser la base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

Exercice 2 ***(Résolution d'une équation fonctionnelle :*** CCINP PC 2021 ***Exercice 2).***

Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ et } \forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x^2}. \qquad (P)$$

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

I.1 - Existence de la solution

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

1° Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

Dans tout les reste de cet exercice, on note $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la somme de la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}\varphi_k$.

2° Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $\varphi(x+1) + \varphi(x) = \frac{1}{x^2}$.

3° En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\varphi_k(x)\right| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

4° Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

I.2 - Unicité de la solution

5° Montrer que si $f :]0, +\infty \to \mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

6° En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

Partie II - Étude de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ du problème (P).

7. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$.
8. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0, +\infty[$. En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+.
9. Justifier que la fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

10. En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0, +\infty[$.
11. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer que :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}.$$

En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.

Partie III - Expression intégrale de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on déterminer une expression de φ sous la forme d'une intégrale. On considère un élément $x \in]0, +\infty[$.

12° Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $t \mapsto t^{x+k-1} \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$ et que l'on a :

$$\int_0^1 t^{x+k-1} \ln(t) \mathrm{d}t = -\frac{1}{(x+k)^2}.$$

13° En déduire que la fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0, 1]$ et que :

$$\varphi(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t} \mathrm{d}t.$$

Exercice 3 *(*E3A PC 2022 *Exercice 2)*.
Les théorèmes utilisés seront cités avec précision en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) \mathrm{d}t$.

1° **Étude de la convergence de la série de terme général u_n**

(a) Vérifier que la suite $(|u_n|)$ est décroissante.

(b) Montrer que la suite $(|u_n|)$ tend vers 0.

(c) Prouver que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

2° **Calcul de la somme de cette série**

(a) Soit t un réel. Linéariser $\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$.

(b) En déduire $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos(t)} \mathrm{d}t$.

(c) **Intégration terme à terme ?**

i. Déterminer une relation de récurrence entre $|u_{n+2}|$ et $|u_n|$.

ii. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \geq \frac{1}{n+1}$.

iii. Peut-on utiliser un théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions pour calculer la somme de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$? *On justifiera rigoureusement la réponse.*

(d) On pose, pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n(t) = (-1)^n \cos^n(t)$ et $V_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k(t)$.

En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 4 *(*E3A PC 2022 *Exercice 4)*.

On pose pour tout réel x, lorsque cela est possible, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{e}^{-xt}\mathsf{d}t$.

1° **Continuité de f**

(a) Montrer que l'on peut prolonger par continuité sur $\mathbb{R}_+$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :

$$t \longmapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2.$$

(b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathsf{d}t$ est convergente.

(c) En déduire que la fonction $t \longmapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(d) En déduire que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2° **Régularité de f**

(a) Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $0 < a < b$. On considère $x \in [a, b]$.

i. Montrer que $\forall t \geq 0,\ 0 \leq |\sin(t)| \leq t$.

ii. Montrer que $\forall t > 0,\ 0 \leq \frac{\sin^2(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt} \leq t\mathrm{e}^{-at}$.

iii. Montrer que $\forall t > 0,\ 0 \leq \sin^2(t)\mathrm{e}^{-xt} \leq \mathrm{e}^{-at}$.

(b) En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et donner pour tout réel x strictement positif, une expression de $f''(x)$ sous forme intégrale.

3° **Une autre expression de f''**

On note i un nombre complexe vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$.

(a) Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ |\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\theta - x)t}| = \mathrm{e}^{-xt}$.

(b) En déduire que : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ \displaystyle\lim_{t\to+\infty} |\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\theta - x)t}| = 0$.

(c) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ f''(x) = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2(x^2+4)}$.

On pourra utiliser la formule d'Euler : $\sin(t) = \frac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}{2i}$.

4° **Une autre expression de f**

(a) Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(b) Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

(c) Calculer la dérivée de G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(t) = t\ln(t^2+4) - 2t + 4\arctan\left(\frac{t}{2}\right)$.

(d) Déterminer alors, pour tout réel x strictement positif, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

5° Calculer alors la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathsf{d}t$.