DS 6⋆ : samedi 10 février

4h sans calculatrice

Le candidat numérotera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 *(Résolution d'une équation fonctionnelle :* CCINP PC 2021 *Exercice 2)***.**
Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ et } \forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x+1)+f(x) = \frac{1}{x^2}. \qquad (P)$$

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

I.1 - Existence de la solution

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

1° Montrer que la série de fonctions $\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

Dans tout les reste de cet exercice, on note $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la somme de la série $\sum_{k\geq 0} \varphi_k$.

2° Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $\varphi(x+1)+\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$.

3° En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

4° Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

I.2 - Unicité de la solution

5° Montrer que si $f :]0,+\infty \to \mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

6° En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

Partie II - Étude de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ du problème (P).

7. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon,+\infty[$.
8. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0,+\infty[$. En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+.
9. Justifier que la fonction φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que l'on a :
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$
10. En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0,+\infty[$.
11. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer que :
$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad \frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}.$$
En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.

Partie III - Expression intégrale de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on déterminer une expression de φ sous la forme d'une intégrale. On considère un élément $x \in]0,+\infty[$.

12° Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $t \mapsto t^{x+k-1}\ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et que l'on a :

$$\int_0^1 t^{x+k-1}\ln(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{(x+k)^2}.$$

13° En déduire que la fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0,1]$ et que :

$$\varphi(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}\mathrm{d}t.$$

Exercice 2 *(Théorème de la Limite Centrale :* Mines PC-PSI 2010*, maths 1, sujet de 3h)***.**
Notations.
On introduit les trois espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de fonctions suivants.

- $C_0(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$.
  On rappelle qu'une telle fonction u est nécessairement bornée sur $\mathbb{R}$.
- $C_0^\infty(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions de classe C^∞ (sur $\mathbb{R}$) u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} u^{(k)}(x) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} u^{(k)}(x)$.
  On a noté $u^{(k)}$ la dérivée k-ième de u.
- $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues positives et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à 1.

On munit $C_0(\mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_\infty$: plus précisément, pour toute fonction $u \in C_0(\mathbb{R})$, on pose : $\|u\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |u(x)|$.

On pourra utiliser librement le théorème de Fubini *admis* ci-dessous :

Théorème 1. *(Fubini) Soit $(x,y) \mapsto F(x,y)$ une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que F vérifie les trois propriétés suivantes.*

1) Pour tous réels x, y, les deux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(v,y)|\,\mathrm{d}v$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,t|\,\mathrm{d}t$ convergent.

2) Les fonctions $y \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)|\,\mathrm{d}x$, $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)|\,\mathrm{d}y$, $y \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\,\mathrm{d}x$, $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\,\mathrm{d}y$ sont toutes continues sur $\mathbb{R}$.

3) $y \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)|\,\mathrm{d}x$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, c'est à dire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)|\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$ converge.

Alors, dans ce cas, $y \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\,\mathrm{d}x$ et $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\,\mathrm{d}y$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et leurs intégrales sur $\mathbb{R}$ sont égales. Autrement dit, on peut intervertir les deux intégrales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

I] Préliminaires.

Pour f et g appartenant respectivement à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $C_0(\mathbb{R})$, on définit le produit de convolution $f * g$ par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$$

On définit $f * g(x)$ par la même formule si $f \in C_0(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Q1. Soient $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $g \in C_0(\mathbb{R})$. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$ converge pour tout réel x. Puis montrer que $f * g$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$. (On pourra utiliser le théorème de continuité sous les signe $\int$ et on vérifiera avec soin que les conditions de validité sont remplies). Vérifier de plus que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f * g(x) = g * f(x)$$

Q2. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f * g(x) = 0$. (On considèrera une suite réelle quelconque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$. On vérifiera avec soin qu'on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} f * g(x_n)$).
Montrer de même que $\lim\limits_{x\to-\infty} f * g(x) = 0$

Q3. Soient f et g appartenant à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Montrer alors que $f * g$ définit une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Plus précisément, montrer que $f*g$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$, bornée, positive et d'intégrale égale à 1. (On appliquera le théorème de Fubini à la fonction $(x,y) \mapsto f(y)g(x-y)$ et on pourra se contenter de ne vérifier que les conditions 1) et 3)).

Dans la suite, on admettra et on utilisera librement le résultat suivant. Si f et g appartiennent à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et u est une fonction de $C_0(\mathbb{R})$ alors, $f * (g * u) = (f * g) * u$.
Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. On définit alors le produit de convolution $f_1 * \cdots * f_n$ par récurrence comme suit : $f_1 * \cdots * f_k = (f_1 * \cdots * f_{k-1}) * f_k,\ \forall k \in \{3, \ldots, n\}$.
Il est clair que $f_1 * \cdots * f_n$ est une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
Dans la suite, on notera f^{*n} la fonction $f * \cdots * f$, la fonction f intervenant n fois.

II] Une classe d'opérateurs sur $C_0(\mathbb{R})$.

Soit f une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. On lui associe l'opérateur T_f agissant sur $C_0(\mathbb{R})$ défini pour tout $u \in C_0(\mathbb{R})$ par $T_f(u) = f * u$.
D'après **Q1** et **Q2**, T_f est un endomorphisme de $C_0(\mathbb{R})$.

Q4. Soit f une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Prouver que pour tout $u \in C_0(\mathbb{R})$,

$$\|T_f(u)\|_\infty \leq \|u\|_\infty$$

Q5. Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Prouver que pour toute fonction u de $C_0(\mathbb{R})$

$$T_f T_g(u) = T_g T_f(u)$$

où $T_f T_g$ désigne la composée des opérateurs T_f et T_g.

Q6. Soient f_1, f_2, g_1, g_2 des fonctions de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Prouver que pour tout $u \in C_0(\mathbb{R})$,

$$\|T_{f_1}T_{f_2}(u) - T_{g_1}T_{g_2}(u)\|_\infty \leq \|T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty + \|T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)\|_\infty$$

Q7. Soient f et g des fonctions de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Prouver que si $u \in C_0(\mathbb{R})$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|(T_f)^n(u) - (T_g)^n(u)\|_\infty \leq n\|T_f(u) - T_g(u)\|_\infty$$

III] Lois normales.

On introduit pour tout réel $h > 0$ la fonction

$$g_h(x) = \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2h^2}},\ x \in \mathbb{R}$$

dite loi normale de paramètre h. On admet que g_1 est une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Q8. Pour tout $h > 0$, montrer que g_h est une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, puis calculer les deux intégrales suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x g_h(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_h(x)\,\mathrm{d}x$$

Soient $h_1 > 0$ et $h_2 > 0$ deux réels strictement positifs. On admettra que :

$$g_{h_1} * g_{h_2} = g_h$$

où $h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$.

Q9. Soit $h > 0$. Établir les deux égalités suivantes entre opérateurs.

$$T_{g_h} = \left(T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}}\right)^n = T_{(g_{\frac{h}{\sqrt{n}}})^{*n}}$$

IV] Convergence faible sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Définition : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. On dira que (f_n) converge faiblement vers f, f étant une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, si pour toute fonction u de $C_0(R)$,

$$\lim_{n\to+\infty} \|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_\infty = 0$$

Soit u une fonction de $C_0(\mathbb{R})$. On fixe un réel $h > 0$ et on considère la fonction $T_{g_h}(u)\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour x réel par :

$$(g_h * u)(x) = T_{g_h}(u)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t)u(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(x-t)u(t)\,\mathrm{d}t$$

où g_h a été défini au début de la partie 3.

Q10. Soit h strictement positif fixé et $k \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un polynôme $P_{k,h}$ dont on précisera le degré tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} g_h(x) = P_{k,h}(x) e^{-\frac{x^2}{2h^2}}$$

Q11. Soient $h, a \in \mathbb{R}^{+*}$ et k un entier positif ou nul. Prouver qu'il existe une fonction $\phi_k\ :\ \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in [-a, a],\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left| P_{k,h}(x-t) e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}} \right| \leq \phi_k(t)$$

La fonction ϕ_k ne dépend que de h, a et k. (On pourra majorer $\left| P_{k,h}(x-t) e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}} \right|$ indépendamment de $(x-t)$. Ensuite on pourra majorer convenablement $e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}}$ pour $|t| \geq 2a$ et $x \in [-a, a]$).

Q12. Soient h strictement positif fixé et $u \in C_0(\mathbb{R})$. Démontrer que $T_{g_h}(u)$ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Puis montrer que $T_{g_h}(u)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Q13. Pour h strictement positif fixé et $u \in C_0(\mathbb{R})$, démontrer que $T_{g_h}(u)$ est une fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Q14. Soit α un réel strictement positif. Déterminer $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \int_{\alpha}^{+\infty} g_h(t)\ \mathrm{d}t$

Q15. Soit $u \in C_0(\mathbb{R})$. Prouver que

$$\lim_{h \to 0^+} \|T_{g_h}(u) - u\|_\infty = 0$$

Pour cela, on utilisera la question précédente ainsi que le résultat admis suivant, valable pour tout $u \in C_0(\mathbb{R})$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 /\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| \leq \alpha\ \Rightarrow\ |u(x) - u(y)| \leq \varepsilon$$

Q16. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et f une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. on suppose que pour toute fonction u de $C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n \to +\infty} \|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_\infty = 0$$

Prouver alors que (f_n) converge faiblement vers f. (On pourra utiliser les questions 4 et 15).

Dans la suite, f est une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ telle que $x \mapsto x^2 f(x)$ est aussi dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\ \mathrm{d}t$ converge et on supposera que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\ \mathrm{d}t = 0$. Pour tout entier n strictement positif, on introduit les deux fonctions f_n et $f_n^\#$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \sqrt{n} f(\sqrt{n} x),\ f_n^\#(x) = n x^2 f_n(x)$$

On admettra que f_n et $f_n^\#$ appartiennent à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Q17. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Vérifier que $\frac{u(x-t) - u(x) + t u'(x)}{t^2}$ se prolonge continûment en $t = 0$. Puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$n(T_{f_n}(u)(x) - u(x)) - \frac{1}{2} u''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u(x-t) - u(x) + t u'(x)}{t^2} - \frac{1}{2} u''(x) \right) f_n^\#(t)\ \mathrm{d}t$$

où u' désigne la dérivée première de u et u'' désigne la dérivée seconde de u.

Q18. Démontrer que pour toute fonction u de $C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n \to +\infty} \left\| n(T_{f_n}(u) - u) - \frac{1}{2} u'' \right\|_\infty = 0$$

(On pourra considérer les trois intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\alpha}$, $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha}$, $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty}$, avec $\alpha > 0$ bien choisi, dans le second membre de la formule de la question précédente).

Q19. Montrer que pour toute fonction u de $C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n \to +\infty} \|T_{f_n}^n(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty = 0$$

où g_1 a été définie au début de la partie 3. (On pourra utiliser les questions 7,9 et 18). Conclure que la suite (f_n^{*n}) converge faiblement vers g_1 ; on rappelle que la notation f^{*n} a été définie juste après la question 3.

Ce dernier résultat intervient en théorie des probabilités. Il constitue une version faible du théorème de la limite centrale dans le cas de variables aléatoires à densité de probabilité f continue bornée sur $\mathbb{R}$.