DS 5 : samedi 13 janvier

4h sans calculatrice

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats, il numérotera aussi ses pages.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1 *(proche du cours et/ou des TDs).*

1° Donner dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (en justifiant) une matrice non diagonalisable mais trigonalisable.
Donner une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas trigonalisable.

2° Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En déduire la valeur de A^n pour $n \in \mathbb{N}$. On donnera explicitement tous les coefficients de A^n.

3° La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ? Si oui, le faire.

4° Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau :

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	$1/6$	$1/4$	$1/6$	$1/4$	$1/6$

on pose ensuite $Y = X^2$.

(i) Déterminer la loi du couple (X, Y) puis la loi de Y.

(ii) Déterminer $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Correction :

1° Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a comme polynôme caractéristique X^2 qui est scindé (ainsi N est trigonalisable, bon étant donné qu'elle est triangulaire supérieure ...), elle n'est pas diagonalisable, en effet si elle l'était, il existerait $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $N = PDP^{-1}$ avec $D = 0$, ainsi on aurait $N = 0$, ce qui n'est pas le cas.
Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ a comme polynôme caractéristique $X^2 + 1$ qui n'est pas scindé, ainsi M n'est pas trigonalisable.

2° On trouve (il faut le détailler !) : $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Comme $A^n = PD^nP^{-1}$ on trouve que : $A^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2^n + 4^n & 0 & 2^n - 4^n \\ 2(4^n - 2^n) & 2.4^n & 2(4^n - 2^n) \\ 2^n - 4^n & 0 & 2^n + 4^n \end{pmatrix}$.

3° $\chi_M = (X-1)^2(X-2)$ qui est scindé, comme $E_1(M)$ est de dimension 1, M est seulement trigonalisable, on trouve (il faut le détailler !), par exemple, que : $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on calcule $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4° (i) $Y(\Omega) = \{0, 1, 4\}$, $\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = 0$ si $j \neq i^2$, $\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = i^2)) = P(X = i)$.
$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = 1/6$, $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = -1) = 1/2$, $\mathbb{P}(Y = 4) = 1/3$.
Il est bien entendu préférable ici de mettre ces résultats sous la forme de tableaux.

(ii) $\mathbb{E}(X) = 0$ par symétrie de même $\mathbb{E}(XY) = 0$ donc $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
Pourtant X et Y ne sont pas indépendantes : $\mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 0)) = 0$ mais $\mathbb{P}(X = 1) > 0$ et $\mathbb{P}(Y = 0) > 0$.

Exercice 2 *(E3A PC 2020 Ex 1).*

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1° Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

2° Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle inversible ?

3° Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable, M_a est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction :

1° On a $\chi_{M_a} = \begin{vmatrix} X-1 & -a & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X & -1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = (X-1)(X^2-1) = (X-1)^2(X+1)$. Ainsi 1 est valeur propre double et -1 est valeur propre simple de M_a.

On a ainsi que M_a est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_1(A)) = 2$. On a $M_a - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, séparons en deux cas :
Si $a = 0$, alors cette matrice est de rang 1 et donc (d'après le théorème du rang) $\dim(E_1(A)) = 2$, on a donc M_0 diagonalisable.
Si $a \neq 0$, alors $\mathrm{rg}(M_a - I_3) = 2$, ainsi (toujours d'après le théorème du rang), $\dim(E_1(A)) = 1$, on a donc que M_a n'est pas diagonalisable.
En conclusion : M_a est diagonalisable si et seulement si $a = 0$

2° 0 n'est jamais valeur propre de M_a donc M_a est inversible pour tout $a \in \mathbb{R}$.

3° On suppose donc $a \neq 0$, et notons f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M_a.
Comme -1 est valeur propre simple, on a $\dim(E_{-1}(f_a)) = 1$, de plus On a : $M_a + I_3 = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, comme $aC_1 - 2C_2 + 2C_3 = 0$ (on peut aussi résoudre un système) on pose $e_1 = (a, -2, 2)$ et on a $f_a(e_1) = -e_1$. On a $\dim(E_1(f_a)) = 1$, et clairement $e_2 = (1, 0, 0)$ est tel que $f_a(e_2) = e_2$.
Il reste donc à trouver $e_3 = (x, y, z)$ tel que (e_1, e_2, e_3) soit une base de $\mathbb{R}^3$ et tel que $f_a(e_3) = e_2 + e_3$.

On doit donc avoir $\begin{cases} x + ay & = 1 + x \\ z & = y \\ y & = z \end{cases} \iff \begin{cases} ay & = 1 \\ -y + z & = 0 \\ y - z & = 0 \end{cases}$.

On pose donc $e_3 = (0, 1/a, 1/a)$, on a bien $f_a(e_3) = e_2 + e_3$, il ne reste plus qu'à montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, le plus rapide est de considérer la matrice $P = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/a \\ 2 & 0 & 1/a \end{pmatrix}$. En développant par rapport à la deuxième colonne on a $\det(P) = -4/a$ ainsi (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, ainsi M_a est semblable à $T = \mathrm{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(f_a) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 *(sur les matrices compagnon : d'après CCP MP 2001 Maths 2).*

Dans cet exercice $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un entier naturel, et χ_A le polynôme caractéristique de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On considère le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0$ de $\mathbb{K}_n[X]$ et C_P sa matrice compagnon associée, c'est-à dire la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & . & . & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 & -a_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & . & . & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(ie la matrice $C_P = (c_{i,j})$ est définie par $c_{i,j} = 1$ pour $i - j = 1$, $c_{i,n} = -a_{i-1}$ et $c_{i,j} = 0$ dans les autres cas).

1° Montrer que C_P est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$.

2° Calculer le polynôme caractéristique de la matrice C_P et déterminer une constante k telle que $\chi_{C_p} = kP$.

3° Soit Q un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\chi_A = Q$.

4° On note $C_P^\top$ la transposée de la matrice C_P.

a) Justifier la proposition : $\mathrm{Sp}(C_P) = \mathrm{Sp}(C_P^\top)$.

b) Soit λ élément de $\mathrm{Sp}(C_P^\top)$, déterminer (ie. l'écrire avec un Vect) le sous-espace propre de $C_P^\top$ associé à λ.

c) Montrer que $C_P^\top$ est diagonalisable si et seulement si P est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.

d) On suppose que P admet n racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distinctes, montrer que $C_P^\top$ est diagonalisable et en déduire que le déterminant de VANDERMONDE $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & . & . & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & . & . & \lambda_n^2 \\ . & . & . & . & . \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & . & . & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est non nul.

e) (rajout) Question de cours : Donner (sans démonstration) l'expression factorisée du déterminant de VANDERMONDE.

Correction :

1° On développe par rapport à la première ligne et on trouve $\det C_P = (-1)^{n+1}(-a_0) = (-1)^n a_0 = (-1)^n P(0)$, d'où le résultat.

2° On développe par rapport à la dernière colonne et on trouve :

$$\chi_{C_P}(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_0 \\ -1 & X & \ddots & & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & X & \ddots & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & -1 & X & a_{n-2} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$$
$$= (X + a_{n-1}) \begin{vmatrix} X & 0 & \ldots & & 0 \\ -1 & X & \ddots & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \ldots & & -1 & X \end{vmatrix} - a_{n-2} \begin{vmatrix} X & 0 & \ldots & & 0 \\ -1 & X & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \ldots & -1 & X & 0 \\ 0 & \ldots & & 0 & -1 \end{vmatrix} + \ldots$$

et on reconnaît $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 = P(X)$. Donc $k = 1$.

3° Il faut et il suffit que Q soit unitaire de degré n. En effet un polynôme caractéristique est toujours unitaire de degré n, cette condition est donc nécessaire, et à la question précédente on a montré que la question était suffisante.

4° a) Ce résultat n'est pas spécifique à C_p, il est vrai pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, en effet les valeurs propres sont les racines de χ_A qui se calcule par un déterminant, or le déterminant est invariant par transposition, de plus la transposition est linéaire, ainsi on a $X\mathrm{I}_n - A^\top = X\mathrm{I}_n - A^\top$ ce qui montre que $\chi_A = \chi_{A^\top}$ et donc l'égalité des spectres (car le spectre de A est l'ensemble des racines de χ_A).

b) on a $C_P^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \ldots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$, soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ddots \\ x_n \end{pmatrix}$. Ainsi X est vecteur propre de valeur propre λ si et seulement si il vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} x_2 & = \lambda x_1 \\ x_3 & = \lambda x_2 \\ \vdots & \\ x_n & = \lambda x_{n-1} \\ -a_0 x_1 & - \ldots - a_{n-1}x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_i = \lambda^{i-1}x_1,\ \forall i \in [\![1, n]\!] \\ (-a_0 - a_1\lambda - \ldots - a_{n-1}\lambda^{n-1})x_1 \quad = \lambda^n x_1 \end{cases}$$

Donc, comme x_1 ne peut être nul (un vecteur propre n'est pas nul), on a donc que λ est racine de P et tout vecteur propre est multiple de $X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$, ie $E_\lambda\left(C_p^\top\right) = \mathrm{Vect}\left(X_\lambda\right)$.

c) On vient de constater que les espaces propres sont des droites, si la matrice $C_P^\top$ est diagonalisable alors la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut n, comme tous les sep sont de dimension 1 il doit donc y en avoir n, ie P possède n racines distinctes (elles sont donc toutes simples).
Réciproquement si P est scindé à racines simples alors le polynôme caractéristique de $C_P^\top$ l'est aussi, ainsi $C_P^\top$ est diagonalisable.

d) Si P est scindé à racines simples, comme on vient de le voir une matrice de passage qui diagonalise $C_P^\top$ est $V = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$, qui est inversible puisque matrice de passage !

e) C'est : $\prod_{0 \leq i < j \leq n} \lambda_j - \lambda_i$.

Exercice 4 *(*E3A MP 2016 *Maths 1 exercice 4)*.

Un fabricant de produits d'entretien pour machines à café fournit deux types de produits : un produit détartrant (produit A) et un produit dégraissant (produit B). Ce fabricant vend les produits conditionnés uniquement en boîtes contenant à la fois un produit A et un produit B. Cependant, pour rendre service à ses clients qui n'ont besoin que d'un seul produit, un commerçant accepte de vendre séparément les produits.

Pour la suite, on suppose que chaque client qui se présente chez le commerçant n'effectue qu'un seul achat. On suppose également que les choix (du produit A ou B) des clients sont indépendants. On fait également l'hypothèse qu'il ne reste aucune boîte entamée au début de la journée.

On considère que chaque client qui se présente chez ce commerçant achète le produit A avec la probabilité $p \in]0,1[$ et le produit B avec la probabilité $1-p$. On note X (respectivement Y) le nombre de produits A (respectivement de produits B) vendus au cours de la journée. On notera $Z = \max(X, Y)$.

1° On considère une journée où 4 clients se sont présentés. Déterminer la loi de X , la loi de Y et les espérances de ces deux variables aléatoires. Déterminer la loi de Z. Que représente cette variable aléatoire ?

On suppose maintenant que le nombre de personnes se présentant chez le commerçant durant une journée est une variable aléatoire réelle N suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

2° Soit n un entier naturel. Quelle est la loi de X sachant que l'évènement $[N = n]$ est réalisé ?

3° Déterminer la loi conjointe du couple (X, N).

4° En déduire la loi de X. Donner sans calcul les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

5° Démontrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

6° En utilisant la relation $N = X + Y$, calculer $\text{Cov}(X, N)$.

7° Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$S(k, x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!}$$

Exprimer $\mathbb{P}(Z \leq k)$ en fonction de λ, $S(k, \lambda p)$ et $S(k, \lambda(1-p))$.

8° On utilise dans cette question le langage de programmation `PYTHON`.

(a) Définir la fonction `S(k,x)` qui calcule $S(k, x)$ à partir des valeurs de k et x données.

(b) On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$, $\lambda = 10$ et que le commerçant constate au début de la journée qu'il lui reste exactement 5 boîtes, aucune n'étant entamée. Écrire les instructions permettant d'afficher la probabilité que le commerçant tombe en rupture de stock au cours de la journée.

Correction :

1° X représente le nombre de clients qui achètent le produit A, comme les choix des clients sont indépendants on a donc affaire à une loi binomiale, ainsi $X \sim \mathcal{B}(4, p)$, ainsi $\mathbb{E}(X) = 4p$. Il en va de même pour $Y \sim \mathcal{B}(4, 1-p)$, ainsi $\mathbb{E}(Y) = 4(1-p)$.
On a ici $X + Y = 4$, ainsi la valeur de X détermine complètement la valeur de Y, on a $Z = \max(X, Y) = \max(X, 4-X)$, ainsi $Z(\Omega) = \{2, 3, 4\}$ (car les couples possibles pour les valeurs de (X, Y) sont $(0, 4)$, $(1, 3)$, $(2, 2)$, $(3, 1)$ et $(4, 0)$ qui donnent comme valeur pour Z 4,3,2,3 et 4 respectivement), ce qui permet de calculer la loi de Z.
On a $\mathbb{P}(Z = 2) = \mathbb{P}(X = 2) = \binom{4}{2} p^2(1-p)^2 = 6p^2(1-p)^2$, $\mathbb{P}(Z = 3) = \mathbb{P}(X = 1 \text{ ou } X = 3) = 4p(1-p)^3 + 4p^3(1-p) = 4p(1-p)(1-2p+2p^2)$ et $\mathbb{P}(Z = 4) = \mathbb{P}(X = 0 \text{ ou } X = 4) = p^4 + (1-p)^4$.
Z correspond au nombre de boites ouvertes.

2° la loi de X sachant $(N=n)$ est, comme au 1°, la loi $\mathcal{B}(n,p)$.

3° Pour $(k,n)\in\mathbb{N}^\star$, on a :

$$\mathbb{P}(X=k,N=n)=\mathbb{P}(N=n)\mathbb{P}_{(N=n)}(X=k)=\begin{cases}0 & \text{si } k\geq n+1\\ \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} & \text{si } k\in[\![0,n]\!]\end{cases}$$

4° On a $X(\Omega)\subset\mathbb{N}$, pour $k\in\mathbb{N}$, en utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $((N=n))_{n\in\mathbb{N}}$ on a : $\mathbb{P}(X=k)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k,N=n)=\sum_{n=k}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=$ $\mathrm{e}^{-\lambda}\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{n+k}}{k!n!}p^k(1-p)^n=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^n}{n!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{\lambda(1-p)}=$ $\mathrm{e}^{-p\lambda}\dfrac{(p\lambda)^k}{k!}$.
Ainsi X suit une loi de Poisson de paramètre λp, donc $\mathbb{E}(X)=\lambda p$ et $\mathbb{V}(X)=\lambda p$.

5° Tout d'abord, en remplaçant p par $1-p$ à la question précédente on trouve $Y\sim\mathcal{P}(\lambda(1-p))$.
Pour $(k,\ell)\in\mathbb{N}^2$ on a d'une part : $\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=\ell)=\mathrm{e}^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{-(1-p)\lambda}\frac{((1-p)\lambda)^\ell}{\ell!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}\frac{((1-p)\lambda)^\ell}{\ell!}$.
D'autre part (en utilisant $X+Y=N$) : $\mathbb{P}(X=k,Y=\ell)=\mathbb{P}(X=k,X+Y=k+\ell)=\mathbb{P}(X=k,N=k+\ell)=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!}\binom{k+\ell}{k}p^k(1-p)^{k+\ell-k}$ (car k est bien compris entre 0 et $k+\ell$). Ainsi $\mathbb{P}(X=k,Y=\ell)=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!}\frac{(k+\ell)!}{k!\ell!}p^k(1-p)^\ell=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}\frac{((1-p)\lambda)^\ell}{\ell!}$.
Ainsi, pour tout k et ℓ, on a : $\mathbb{P}(X=k,Y=\ell)=\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=\ell)$, ainsi les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

6° En utilisant la bilinéarité de la covariance et que $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ puisque X et Y sont indépendantes on trouve : $\mathrm{Cov}(X,N)=\mathrm{Cov}(X,X+Y)=\mathrm{Cov}(X,X)+\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathbb{V}(X)+0=\lambda p$.

7° Soit $k\in\mathbb{N}$, on a (le maximum de deux nombres est plus petit que k si et seulement si ils le sont tous les deux) :$\mathbb{P}(Z\leq k)=\mathbb{P}((X\leq k)\cap(Y\leq k))$, par indépendance de X et Y on en déduit que $\mathbb{P}(X\leq k)=\mathbb{P}(X\leq k)\mathbb{P}(Y\leq k)$.
Or $\mathbb{P}(X\leq k)=\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}(X=i)=\sum_{i=0}^{k}\mathrm{e}^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^i}{i!}=\mathrm{e}^{-\lambda p}S(k,\lambda p)$. De même (en remplaçant p par $1-p$) on a $\mathbb{P}(Y\leq k)=\mathrm{e}^{-\lambda(1-p)}S(k,\lambda(1-p))$.
Ainsi $\mathbb{P}(X\leq k)=\mathrm{e}^{-\lambda}S(k,\lambda p)S(k,\lambda(1-p))$.

8° (a)
```
def S(k, x):
        res, u = 1, 1
        for j in range(1, k+1):
            u = u * x/j
            res += u
        return res
```
(b) Le commerçant est en rupture de stock si Z est strictement plus grand que 5, on doit donc calculer $\mathbb{P}(Z>5)=1-\mathbb{P}(Z\leq 5)=\mathrm{e}^{-10}S(5,5)S(5,5)$
```
from math import exp
print(exp(-10)*S(5,5)**2)
```

Exercice 5 *(*E3A PC 2019 *Maths 1 exercice 4)*.

1. **Question de cours 1** : Rappeler sans démonstration l'écriture sous forme de série de $\exp(z)$ pour $z\in\mathbb{C}$.
2. **Question de cours 2** : Soit $p\in\mathbb{N}$. Prouver que si deux matrices carrées M et N de taille d sont semblables, alors les matrices M^p et N^p sont semblables.

   Pour toute matrice $A\in\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, on pose, lorsque cela est possible, $\varphi(A)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}A^{2n+1}=\lim_{m\to+\infty}\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}A^{2n+1}$.
3. Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on pose $s(z)=\frac{1}{2\mathrm{i}}[\exp(\mathrm{i}z)-\exp(-\mathrm{i}z)]$ et $c(z)=\frac{1}{2}[\exp(\mathrm{i}z)+\exp(-\mathrm{i}z)]$ où i vérifie $\mathrm{i}^2=-1$.
   (a) Vérifier que pour tout $z\in\mathbb{C}$, on a : $s(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$.
   (b) Déterminer une formule analogue pour $c(z)$, $z\in\mathbb{C}$.

4. Si $A = \gamma I_2$ avec $\gamma \in \mathbb{C}$, déterminer $\varphi(A)$.
5. **On suppose que A possède deux valeurs propres distinctes α et β.**
   (a) Justifier l'existence d'une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que : $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = P^{-1}AP$.
   (b) Déterminer $\varphi(B)$ puis $\varphi(A)$ à l'aide de la matrice P.
6. **On suppose que les valeurs propres de A sont égales : $\beta = \alpha$.**
   (a) Justifier l'existence d'une matrice $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et d'un nombre complexe y tels que $C = \begin{pmatrix} \alpha & y \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ$.
   (b) Calculer C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) En déduire $\varphi(A)$ à l'aide de la matrice Q.
7. Justifier l'existence de $\varphi(A)$ pour toute matrice A de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.
8. Existe-t-il une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que l'on ait : $\varphi(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Correction :

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\exp(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.
2. Comme M et N sont semblables il existe $P \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{K})$ tel que $M = PNP^{-1}$, ainsi $M^2 = PNP^{-1}PNP^{-1} = PN^2P^{-1}$ et par récurrence directe (la rédiger) on a $M^p = PN^pP^{-1}$, ainsi M^p et N^p sont semblables.
3. (a) On a $s(z) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left[\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}^n z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \mathrm{i}^n z^n}{n!}\right] = \dfrac{1}{2\mathrm{i}} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (1-(-1)^n)\frac{\mathrm{i}^n z^n}{n!}$, or $1-(-1)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ 2 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$, on en déduit donc que $s(z) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}} \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} 2\frac{\mathrm{i}^{2p+1} z^{2p+1}}{(2p+1)!}$, et comme $(\mathrm{i})^{2p+1} = \mathrm{i}(-1)^p$, on trouve bien que $s(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.
   (b) De même on trouve que $c(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $A^n = \gamma^n I_2$, ainsi pour $m \geq 0$, on trouve $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \gamma^{2n+1} I_2 \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} s(\gamma) I_2$, ainsi $\varphi(A)$ existe et on a : $\varphi(A) = s(\gamma)I_2$.
5. (a) les valeurs propres étant racines du polynôme caractéristique (unitaire de degré 2), on a $\chi_A(X) = (X-\alpha)(X-\beta)$, ainsi χ_A est scindé simple, donc A est diagonalisable, il existe donc $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PBP^{-1}$ avec $B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ (ainsi $B = P^{-1}AP$).
   (b) Pour $m \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} B^{2n+1} = \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \begin{pmatrix} \alpha^{2n+1} & 0 \\ 0 & \beta^{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \alpha^{2n+1} & 0 \\ 0 & \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \beta^{2n+1} \end{pmatrix} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} s(\alpha) & 0 \\ 0 & s(\beta) \end{pmatrix}$, ainsi $\varphi(B)$ existe et $\varphi(B) = \begin{pmatrix} s(\alpha) & 0 \\ 0 & s(\beta) \end{pmatrix}$.
   Pour $m \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} = P \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} P^{-1} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} P\varphi(B)P^{-1}$. Ainsi $\varphi(A)$ existe et $\varphi(A) = P \begin{pmatrix} s(\alpha) & 0 \\ 0 & s(\beta) \end{pmatrix} P^{-1}$.
6. (a) La matrice A ne possède qu'une valeur propre, comme $\chi_A(X)$ est scindé (on est dans $\mathbb{C}$), la matrice A est donc trigonalisable, il existe donc une matrice $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et une matrice C triangulaire supérieure de la forme $C = \begin{pmatrix} \alpha & y \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ telle que $A = QCQ^{-1}$ (ie $C = Q^{-1}AQ$).

(b) Notons $N = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ainsi $C = \alpha I_2 + yN$, on a $N^2 = 0$, comme αI_2 et yN commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton et ainsi, pour $n \geq 1$ on a : $C^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} y^k N^k = \alpha^n I_2 + \alpha^{n-1} y \binom{n}{1} N = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1}y \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}$. Cette formule reste vrai pour $n = 0$.

(c) Pour $m \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} C^{2n+1} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \alpha^{2n+1} & \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (2n+1)\alpha^{2n+1-1} y \\ 0 & \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \alpha^{2n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \alpha^{2n+1} & y \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{(2n)!} \\ 0 & \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \alpha^{2n+1} \end{pmatrix} \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} s(\alpha) & yc(\alpha) \\ 0 & s(\alpha) \end{pmatrix}$. Ainsi $\varphi(C)$ existe et $\varphi(C) = \begin{pmatrix} s(\alpha) & yc(\alpha) \\ 0 & s(\alpha) \end{pmatrix}$. Par suite, comme en 5°(b) on a l'existence de $\varphi(A)$ et on a $\varphi(A) = Q \begin{pmatrix} s(\alpha) & yc(\alpha) \\ 0 & s(\alpha) \end{pmatrix} Q^{-1}$.

7. Le polynôme caractéristique de A est de degré deux, comme il est scindé il possède soit deux racines distinctes, soit une racine double, on a montré dans les deux cas l'existence de $\varphi(A)$, ainsi $\varphi(A)$ existe toujours.

8. Notons $Y = \begin{pmatrix} 1 & 2019 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, notons tout d'abord que Y n'est pas diagonalisable, en effet si elle l'était elle serait semblable à I_2, et donc serait égal à I_2, ce qui n'est pas le cas.
Supposons l'existence de X tel que $\varphi(X) = Y$. La matrice X possède soit deux valeurs propres distinctes soit une valeur propre double.
   — Cas 1 : X possède deux valeurs propres distinctes α et β, alors d'après 5° il existe P inversible tel que $\varphi(X) = P \begin{pmatrix} s(\alpha) & 0 \\ 0 & s(\beta) \end{pmatrix} P^{-1}$ ainsi Y est semblable à une matrice diagonale, ce qui n'est pas le cas. Ce cas est donc exclus.
   — Cas 2 : X possède une valeurs propre double α, alors d'après 6° il existe Q inversible tel que $\varphi(X) = Q \begin{pmatrix} s(\alpha) & yc(\alpha) \\ 0 & s(\alpha) \end{pmatrix} Q^{-1}$. Ainsi Y est semblable à $\begin{pmatrix} s(\alpha) & yc(\alpha) \\ 0 & s(\alpha) \end{pmatrix}$, elle a donc les mêmes valeurs propres, ainsi $s(\alpha) = 1$. Or on peut remarquer que $c(\alpha)^2 + s(\alpha)^2 = \frac{e^{2i\alpha}+2+e^{-2i\alpha}}{4} + \frac{e^{2i\alpha}-2+e^{-2i\alpha}}{-4} = 1$, ainsi $c(\alpha) = 0$ et on a encore Y semblable à une matrice diagonale, ce qui est encore exclus.

On viens donc de montrer, par l'absurde, qu'il n'existe pas de matrice X tel que $\varphi(X) = Y$.