DS 6 : samedi 10 février

4h sans calculatrice

Le candidat numérotera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1 *(proche du cours et/ou des TDs)*.

1° Vrai/Faux Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction f sur un intervalle I. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses (démonstration ou contre-exemple).

(a) Dans le cas $I=\mathbb{R}$, si les f_n sont toutes périodiques de période T alors f est aussi périodique de période T.

(b) Si les f_n sont toutes continues alors f l'est aussi.

2° Déterminer la limite simple des suites de fonctions suivantes, et déterminer si la convergence est uniforme ou non.

(a) $f_n(x)=x^n(1-x)$ sur $[0,1]$

(b) $f_n(x)=x^n(1+x)$ sur $[0,1]$

3° Soit la fonction définie par $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

(b) Montrer que $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$.

(c) Calculer f' (on l'exprimera sans somme) puis en déduire f sur $\mathbb{R}_+^\star$ (on ne cherchera pas a déterminer la constante).

4° Vérifier que $\langle P,Q\rangle=\displaystyle\int_0^{+\infty}P(t)Q(t)e^{-t}\mathrm{d}t$ définit bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ (on oubliera pas de justifier l'existence, de $\langle P,Q\rangle$).

5° Dans $\mathbb{R}^3$, orthonormaliser la base $\mathcal{B}=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

Correction :

1° (a) C'est vrai. Soit $x\in\mathbb{R}$ fixé. Pour $n\in\mathbb{N}$, on a $f_n(x+T)=f_n(x)$, en faisant $n\to+\infty$, avec la convergence simple, on obtient $f(x+T)=f(x)$. Cette dernière égalité étant vérifiée pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a ainsi que f est T-périodique.

(b) C'est faux ! Pour $n\in\mathbb{N}^\star$ et $x\in[0,1]$ on pose $f_n(x)=x^n$, toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0,1]$ mais la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par $f(x)=0$ pour $x\in[0,1[$ et $f(1)=1$ qui n'est pas continue sur $[0,1]$.

2° (a) Pour $x=1$ on a $f_n(1)=0\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et, pour $x\in[0,1[$, $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, ainsi (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
Déterminons si la convergence est uniforme. Soit $n\geq 2$, la fonction f_n est dérivable sur $[0,1]$ et pour $x\in[0,1]$ on a $f_n'(x)=nx^{n-1}-(n+1)x^n=x^{n-1}(n-(n+1)x)$, ainsi f_n' est positive sur $[0,\frac{n}{n+1}]$ et négative sur $[\frac{n}{n+1},1]$, ainsi f_n est croissante puis décroissante, de plus $f_n(0)=f_n(1)=0$ (faire le tableau de variation). On en déduit que $\|f_n\|_\infty=f_n(\frac{n}{n+1})=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n(1-\frac{n}{n+1})=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}(1-\frac{n}{n+1})$. Or $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}=\exp\left(-n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)=\exp\left(-n\left(\frac{-1}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}(\frac{1}{n})\right)\right)=\exp\left(1+\underset{n\to+\infty}{o}(1)\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\mathrm{e}$. Ainsi $\|f_n\|_\infty\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$. La convergence de (f_n) vers la fonction nulle est donc uniforme sur $[0,1]$.

(b) Pour $x=1$ on a $f_n(1)=2\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}2$ et, pour $x\in[0,1[$, $f_n(x)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, ainsi (f_n) converge simplement vers la fonction f qui vaut 2 en 1 et 0 sur $[0,1[$. Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0,1]$ et que f ne l'est pas la convergence ne peut pas être uniforme sur $[0,1]$.

3° Notons, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = (-1)^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$.

(a) Si $x < 0$, $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement. Si $x = 0$ on a la série harmonique alternée (qui converge d'après le TSA, on n'oubliera pas de préciser les hypothèses du TSA) et si $x > 0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2(-1)^{n+1}\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n} = 0$, ainsi $u_n(x) = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et donc la série $\sum u_n(x)$ cva (donc cv).
Ainsi $\mathcal{D} = \mathbb{R}_+$.

(b) Appliquons le théorème de dérivation $\mathcal{C}^1$ des séries de fonctions.
La série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^\star$ d'après la question précédente.
Les fonctions $u_n : x \mapsto (-1)^n e^{-nx}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.
La série des dérivées, $\sum u_n'(x) = \sum(-1)^n e^{-nx}$, converge normalement sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^\star$; en effet : $\forall x \in [a, b], |u_n'(x)| \le \mathrm{e}^{-na}$, ainsi $\|u_n'\|_\infty^{[a,b]} \le \mathrm{e}^{-na}$ et $\sum \mathrm{e}^{-na}$ converge (série géométrique de raison $-1 < \mathrm{e}^{-a} < 1$).

On en déduit donc que f est $\mathcal{C}^1$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+^\star$ donc sur $\mathbb{R}_+^\star$ et, pour $x > 0$, on a $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'(x)$.

(c) $\sum u_n'(x)$ est une série géométrique, on peut donc calculer sa somme : $f'(x) = \dfrac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}}$. En intégrant on trouve qu'il existe C tel que, pour tout $x \ge 0$, on ait $f(x) = \ln(1 + e^{-x}) + C$.

4° Pour P et Q fixé, $t \mapsto P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[0, \infty[$ donc l'intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$, or c'est un petit o de $\frac{1}{t^2}$ (par croissance comparée), donc l'intégrale converge.
Il est symétrique , bilinéaire, positif (car $P^2(t)\mathrm{e}^{-t} \ge 0$), si $\langle P, P\rangle = 0$, comme $t \mapsto P^2(t)\mathrm{e}^{-t}$ est une fonction continue et positive et comme son intégrale sur $[0, +\infty[$ est nulle cette fonction est nulle sur $\mathbb{R}_+$, comme l'exponentielle ne s'annule pas on a P^2 donc P identiquement nul sur $[0, +\infty[$, ce polynôme a une infinité de racines c'est donc le polynôme nul. Ce qui termine de montrer que $\langle\cdot, \cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathbb{R}[X]$, ie. que c'est un produit scalaire.

5° On obtient $\varepsilon_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 1)$, $\varepsilon_2 = (0, 1, 0)$ et $\varepsilon_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 0, 1)$

Exercice 2 *(Résolution d'une équation fonctionnelle :* CCINP PC 2021 *Exercice 2).*
Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ et } \forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x + 1) + f(x) = \frac{1}{x^2}. \qquad (P)$$

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

I.1 - Existence de la solution

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x + k)^2}.$$

1° Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\ge0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Dans tout les reste de cet exercice, on note $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la somme de la série $\displaystyle\sum_{k\ge0} \varphi_k$.

2° Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $\varphi(x + 1) + \varphi(x) = \frac{1}{x^2}$.

3° En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \le \frac{1}{(x + n + 1)^2}.$$

4° Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

I.2 - Unicité de la solution

5° Montrer que si $f :]0,+\infty \to \mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

6° En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

Correction :

1° Pour $x>0$ fixé on a $|\varphi_k(x)| \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$, ainsi $\sum \varphi_k(x)$ converge absolument donc converge, ce qui montre bien la convergence simple de $\sum \varphi_k$ sur $]0,+\infty[$.
Alternative : On peut aussi utiliser le TSA directement ici, ce qui fait gagner un peut de temps pour la question 3°.

2° Pour $x>0$, on a : $\varphi(x+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+1+k)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(x+k)^2} = -(\varphi(x) - \varphi_0(x)) = -\varphi(x) + \frac{1}{x^2}$. Ce qui montre bien que $\varphi(x+1) + \varphi(x) = \frac{1}{x^2}$.

3° Pour $x>0$, la série $\sum \varphi_k(x)$ est une série alternée qui relève du TSA (elle est bien alternée et $(|\varphi_k(x)|)_k = \left(\frac{1}{(x+k)^2}\right)_k$ tend bien vers 0 en décroissant), ce qui donne non seulement la convergence de la série, mais aussi la domination du reste, ie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en notant $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)$, que $|R_n(x)| \leq |\varphi_{n+1}(x)| = \frac{1}{(x+n+1)^2}$.

4° Pour $x>0$ on a $R_0(x) = \varphi(x) - \varphi_0(x)$, la question précédente donne donc $\left|\varphi(x) - \frac{1}{x^2}\right| \leq \frac{1}{(x+1)^2}$, ainsi $\varphi - \varphi_0$ admet 0 comme limite en $+\infty$, et comme φ_0 tend aussi vers 0 en $+\infty$ on a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$, ce qui montre, avec la question 2°, que φ est une solution de (P).
Alternative : La question précédente permet de montrer la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^\star$ de (R_n) vers la fonction nulle, ainsi $\sum \varphi_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^\star$, comme de plus tous les φ_k tendent vers 0 en $+\infty$, on peut appliquer le théorème de la double limite pour avoir le résultat.

5° Soit f une solution de (P). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x>0$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la relation de (P) appliquée à $x+k$ donne : $f(x+k+1) - f(x+k) = \frac{1}{(x+k)^2}$, on multiplie ces égalités par $(-1)^k$ et on somme pour obtenir : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f(x+k+1) + (-1)^k f(x+k) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} f(x+k) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f(x+k) = (-1)^n f(x+n+1) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f(x+k) + f(x) + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k f(x+k) = (-1)^n f(x+n+1) + f(x)$. Ce qui montre bien que $f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$.
Alternative : Démonstration par récurrence sur n.

6° On vient de démontrer, pour tout $x>0$ et $n \in \mathbb{N}$ que $f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x)$, il ne reste plus qu'a faire tendre n vers $+\infty$, ce qui est possible à droite puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} f(x+n+1) = 0$ (premier résultat de la propriété (P)) et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x) = \varphi(x)$. Ainsi $f(x) = \varphi(x)$, et donc $f = \varphi$, ce qui montre bien que φ est l'unique solution de (P).

Partie II - Étude de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ du problème (P).

7. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon,+\infty[$.
8. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0,+\infty[$. En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+.
9. Justifier que la fonction φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

10. En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0,+\infty[$.
11. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer que :

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad \frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}.$$

En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.

Correction :

7° Pour $x > \varepsilon$ et $k \in \mathbb{N}$, on a $|\varphi_k(x)| = \frac{1}{(x+k)^2} \leq \frac{1}{(\varepsilon+k)^2}$, ainsi $\|\varphi_k\|_\infty^{[\varepsilon,+\infty[} \leq \frac{1}{(\varepsilon+k)^2}$. Ainsi la série $\sum \varphi_k$ converge normalement (donc uniformément) sur $[\varepsilon,+\infty[$.
Alternative Utiliser 3° pour avoir la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^\star$ de (R_n) vers la fonction nulle.

8° Comme toutes les fonctions φ_k sont continues sur $[\varepsilon,+\infty[$ et que la convergence de la série $\sum \varphi_k$ y est uniforme on a que φ est continue sur $[\varepsilon,+\infty[$, ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc φ continue sur $]0,+\infty[$.
Comme φ vérifie la propriété (P), pour tout $x > 0$ on a : $x^2\varphi(x+1) + x^2\varphi(x) = 1$, or $\lim\limits_{x\to 0} x^2\varphi(x+1) = 0$ (par continuité de φ en 1) on a donc $\lim\limits_{x\to 0} x^2\varphi(x) = 1$, ie $\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.

9° Appliquons le théorème de dérivation $\mathcal{C}^1$ des séries de fonctions. On a :

(i) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, φ_k est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]0,+\infty[$ et, pour $x > 0$, $\varphi_k'(x) = \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$.

(ii) $\sum \varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers φ.

(iii) Soit $\varepsilon > 0$, pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in [\varepsilon,+\infty[$, on a $|\varphi_k'(x)| \leq \frac{2}{(\varepsilon+k)^3}$, ainsi $\|\varphi_k'\|_\infty^{[\varepsilon,+\infty[} \leq \frac{2}{(\varepsilon+k)^3}$ et comme $\sum \frac{2}{(\varepsilon+k)^3}$ converge on a que $\sum \varphi_k'$ converge normalement (donc uniformément) sur $[\varepsilon,+\infty[$.

Ainsi φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon,+\infty[$, ceci étant vérifié pour tout $\varepsilon > 0$, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $,+\infty[$, de plus, pour $x > 0$, on a : $\varphi'(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$.

10° Pour $x > 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$ est une série alternée qui relève du TSA (son terme général est bien alternée et en valeur absolue est décroissant et tend vers 0), ainsi sa somme est du signe de son premier terme, ce qui montre $\varphi'(x) \leq 0$ et donc φ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

11° Pour $x > 1$ on a $\varphi(x+1) \leq \varphi(x) \leq \varphi(x-1)$ (décroissance) en ajoutant $\varphi(x)$ on a $\varphi(x+1) + \varphi(x) \leq 2\varphi(x) \leq \varphi(x) + \varphi(x-1)$, comme de plus φ vérifie la propriété (P) on a donc $\frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}$, il ne reste plus qu'à multiplier par x^2 pour obtenir $1 \leq 2x^2\varphi(x) \leq \frac{x^2}{(x-1)^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$, il ne reste plus qu'à appliquer le théorème des gendarmes pour obtenir $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2\varphi(x) = 1$, ie : $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x^2}$.

Partie III - Expression intégrale de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on déterminer une expression de φ sous la forme d'une intégrale. On considère un élément $x \in]0,+\infty[$.

12° Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $t \mapsto t^{x+k-1}\ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et que l'on a :

$$\int_0^1 t^{x+k-1}\ln(t)\mathsf{d}t = -\frac{1}{(x+k)^2}.$$

13° En déduire que la fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0,1]$ et que :

$$\varphi(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}\mathsf{d}t.$$

Correction :

12° Soit $k \in \mathbb{N}$. Posons $\varepsilon > 0$, la fonction $t \mapsto t^{x+k-1}\ln(t)$ est continue sur $[\varepsilon,1]$, elle est donc intégrable sur cet intervalle, procédons par intégration par parties, pour $t \in [\varepsilon,1]$ posons $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = \frac{t^{x+k}}{x+k}$, u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon,1]$ et pour $t \in [\varepsilon,1]$ on a $u'(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = t^{x+k-1}$. Ainsi $\displaystyle\int_\varepsilon^1 t^{x+k-1}\ln(t)\mathsf{d}t = \left[\frac{t^{x+k}}{x+k}\ln(t)\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{t^{x+k}}{x+k}\frac{1}{t}\mathsf{d}t = 0 - \frac{\varepsilon^{x+k}}{x+k}\ln(\varepsilon) - \frac{1}{x+k}\int_\varepsilon^1 t^{x+k-1}\mathsf{d}t = -\frac{\varepsilon^{x+k}}{x+k}\ln(\varepsilon) - \frac{1}{x+k}\left[\frac{t^{x+k}}{x+k}\right]_\varepsilon^1 =$

$-\dfrac{\varepsilon^{x+k}}{x+k}\ln(\varepsilon) - \dfrac{1}{(x+k)^2} + \dfrac{\varepsilon^{x+k}}{(x+k)^2} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{-1}{(x+k)^2}$.
Ce qui montre bien la convergence de l'intégrale sur $]0,1]$ (et donc l'intégrabilité puisque la fonction est de signe constant) et la formule.

13° On vient de démontrer, pour tout $x > 0$, que $\varphi(x) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 (-1)^k t^{x+k-1}\ln(t)\mathsf{d}t$. De plus on peut tout de suite remarquer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^{x+k-1}\ln(t) = t^{x-1}\ln(t)\sum_{k=0}^{+\infty}(-t)^k = \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$ (série géométrique). Appliquons le théorème d'intégration terme à terme, pour cela on note, pour $k\in\mathbb{N}$ et $t\in]0,1[$, $f_k(t) = (-1)^k t^{x+k-1}\ln(t)$. On a :

(i) Toutes les fonctions f_k sont continues par morceaux et intégrables sur $]0,1]$.
(ii) $\displaystyle\sum_{k\geq 0} f_k$ converge simplement vers $S : t\mapsto \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$ sur $]0,1[$.
(iii) La fonction S est continue par morceaux sur $]0,1[$.
(iv) Pour $k\in\mathbb{N}$, notons $a_k = \int_0^1 ||| f_k(t)|\mathsf{d}t$, d'après la question précédente $a_k = \frac{1}{(x+k)^2}$, ainsi $\sum a_k$ converge

Ainsi S est intégrable sur $]0,1[$ (donc sur $]0,1]$ puisque définie en 1) et $\displaystyle\int_0^1 S(t)\mathsf{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 f_k(t)\mathsf{d}t$.

On a bien montré que : $\forall x > 0$, $\varphi(x) = -\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}\mathsf{d}t$.

Exercice 3 *(*E3A PC 2022 *Exercice 2)***.**
Les théorèmes utilisés seront cités avec précision en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.
Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n = (-1)^n\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^n(t)\mathsf{d}t$.

1° **Étude de la convergence de la série de terme général u_n**
(a) Vérifier que la suite $(|u_n|)$ est décroissante.
(b) Montrer que la suite $(|u_n|)$ tend vers 0.
(c) Prouver que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

2° **Calcul de la somme de cette série**
(a) Soit t un réel. Linéariser $\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)$.
(b) En déduire $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{1}{1+\cos(t)}\mathsf{d}t$.
(c) **Intégration terme à terme ?**
i. Déterminer une relation de récurrence entre $|u_{n+2}|$ et $|u_n|$.
ii. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n que l'on a : $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_n| \geq \frac{1}{n+1}$.
iii. Peut-on utiliser un théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions pour calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$? *On justifiera rigoureusement la réponse.*

(d) On pose, pour tout $t\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et tout $n\in\mathbb{N}$, $v_n(t) = (-1)^n\cos^n(t)$ et $V_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k(t)$.

En appliquant le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, calculer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Correction :

1° (a) Pour $n\in\mathbb{N}$ et $t\in[0,\pi/2]$, on a $0\leq\cos^n(t)\leq 1$, ainsi $0\leq\cos^{n+1}(t)\leq\cos^n(t)$, on en déduit donc (intégrales propres) : $0\leq\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^{n+1}(t)\mathsf{d}t\leq\int_0^{\pi/2}\cos^n(t)\mathsf{d}t$, ie $0\leq|u_{n+1}|\leq|u_n|$. La suite $(|u_n|)$ est donc bien décroissante.
Alternative : $|u_{n+1}|-|u_n| = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\underbrace{\cos^n(t)}_{\geq 0}\underbrace{(\cos(t)-1)}_{\leq 0}\mathsf{d}t\leq 0$.

(b) Appliquons le théorème de convergence dominée, posons pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0, \pi/2]$, $f_n(t) = \cos^n(t)$. On a :
— Pour $t \in]0, \pi/2]$, $\lim_{n\to+\infty} \cos^n(t) = 0$, ainsi (f_n) converge simplement sur $]0, \pi/2$ vers la fonction nulle.
— Toutes les fonctions f_n et la fonction nulle sont continues par morceaux sur $]0, \pi/2]$.
— Hypothèse de domination : Pour tout $(n, t) \in \mathbb{N}\times]0, \pi/2]$, $|f_n(t)| \leq 1 = \varphi(t)$ et φ est bien continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle $]0, \pi/2]$.
Ainsi $(|u_n|)$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$.

(c) la série $\sum u_n$ est une série alternée, les deux questions précédentes montrent qu'elle relève du TSA, ainsi $\sum u_n$ converge simplement.

2° (a) Pour $t \in \mathbb{R}$, $\cos(t) = \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1$, ainsi $\cos^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{\cos(t)+1}{2}$.

(b) On a : $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos(t)}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{2}{\cos^2\left(\frac{t}{2}\right)}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Big[2\tan\left(\frac{t}{2}\right)\Big]_0^{\pi/2} = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(0) = 1$.

(c) i. Soit $n \in \mathbb{N}$, procédons par intégration par parties. Posons, pour $t \in [0, \pi/2]$, $u(t) = \cos^{n+1}(t)$ et $v(t) = \sin(t)$, ainsi u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$ et pour $t \in [0, \pi/2]$, on a $u'(t) = -(n+1)\sin(t)\cos^n(t)$ et $v'(t) = \cos(t)$. Par intégration par parties on a donc : $|u_{n+2}| = \Big[\cos^{n+1}(t)\sin(t)\Big]_0^{\pi/2} - \displaystyle\int_0^{\pi/2} -(n+1)\sin^2(t)\cos^n(t)\mathrm{d}t = 0 + (n+1)\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2(t))\cos^n(t)\mathrm{d}t = (n+1)(|u_n| - |u_{n+2}|)$. On en déduit donc que $(n+2)\,|u_{n+2}| = (n+1)\,|u_n|$, ie $|u_{n+2}| = \frac{n+1}{n+2}\,|u_n|$.

ii. Montrons par récurrence double sur n que $|u_n| \geq \frac{1}{n+1}$.
— Initialisation : $|u_0| = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \geq 1$ et $|u_1| = \int_0^{\pi/2} \cos(t)\mathrm{d}t = \Big[\sin(t)\Big]_0^{\pi/2} = 1 \geq \frac{1}{2}$, ainsi la propriété est initialisée au rang 0 et 1.
— Hérédité : On suppose la propriété au rang n et $n+1$, montrons là au rang $n+2$. On a $|u_{n+2}| = \frac{n+1}{n+2}\,|u_n| \geq \frac{n+1}{n+2}\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2}$, la propriété est donc vérifiée au rang $n+2$.
On a bien montré, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $|u_n| \geq \frac{1}{n+1}$.

iii. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0, \pi/2]$, $v_n(t) = (-1)^n\cos^n(t)$, de telle sorte à avoir $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi/2} v_n(t)\mathrm{d}t$, cependant l'hypothèse centrale du théorème d'intégration terme à terme est la convergence de la série $\sum \int_0^{\pi/2} |v_n(t)|\,\mathrm{d}t$, cependant $\int_0^{\pi/2} |v_n(t)|\,\mathrm{d}t = |u_n|$, cependant l'inégalité de la question précédente avec le fait que $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge dit que $\sum |u_n|$ diverge. Ce TITT ne s'applique donc pas ici.

(d) Appliquons le théorème de convergence dominée à (V_n) :
— Pour $t \in]0, \pi/2]$, la série $\sum v_n(t)$ est une série géométrique de raison $-\cos(t)$, ainsi $(V_n(t)$ converge vers $\frac{1}{1+\cos(t)} = V(t)$. D'où la convergence simple de (V_n) vers V sur $]0, \pi/2]$.
— Toutes les fonctions V_n et la fonction V sont continues par morceaux sur $]0, +\infty]$.
— Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in]0, \pi/2]$, on a $|V_n(t)| = \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-\cos(t))^k\right| = \left|\frac{1-(-\cos(t))^{n+1}}{1+\cos(t)}\right| \leq \frac{2}{1+\cos(t)} = \varphi(t)$.
La fonction φ est bien continue par morceaux et intégrable sur $]0, \pi/2]$ (faussement généralisée).

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{\pi/2} V_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} V(t)\mathrm{d}t = 1$ (la dernière égalité proviens de 2.(b)), de plus pour $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} V_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n}(-1)^n\int_0^{\pi/2}\cos^n(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} u_k$. On a donc montré que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 1$.

Exercice 4 *(*E3A PC 2022 *Exercice 4)*.

On pose pour tout réel x, lorsque cela est possible, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$.

1° **Continuité de f**

(a) Montrer que l'on peut prolonger par continuité sur $\mathbb{R}_+$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par :

$$t \longmapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2.$$

(b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{d}t$ est convergente.

(c) En déduire que la fonction $t \longmapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(d) En déduire que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2° **Régularité de** f

(a) Soient a et b deux réels strictement positifs tels que $0 < a < b$. On considère $x \in [a, b]$.

i. Montrer que $\forall t \geq 0,\ 0 \leq |\sin(t)| \leq t$.

ii. Montrer que $\forall t > 0,\ 0 \leq \frac{\sin^2(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt} \leq t\mathrm{e}^{-at}$.

iii. Montrer que $\forall t > 0,\ 0 \leq \sin^2(t)\mathrm{e}^{-xt} \leq \mathrm{e}^{-at}$.

(b) En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et donner pour tout réel x strictement positif, une expression de $f''(x)$ sous forme intégrale.

3° **Une autre expression de** f''

On note i un nombre complexe vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$.

(a) Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ |\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\theta - x)t}| = \mathrm{e}^{-xt}$.

(b) En déduire que : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ \forall x > 0,\ \lim\limits_{t \to +\infty} |\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\theta - x)t}| = 0$.

(c) Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ f''(x) = \frac{1}{2x} - \frac{x}{2(x^2+4)}$.

On pourra utiliser la formule d'Euler : $\sin(t) = \frac{\mathrm{e}^{it} - \mathrm{e}^{-it}}{2i}$.

4° **Une autre expression de** f

(a) Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

(b) Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

(c) Calculer la dérivée de G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(t) = t\ln(t^2 + 4) - 2t + 4\arctan\left(\frac{t}{2}\right)$.

(d) Déterminer alors, pour tout réel x strictement positif, une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

5° Calculer alors la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathsf{d}t$.

Correction :

1° (a) La fonction $t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Comme $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin(t)}{t} = 1$, on a $\lim\limits_{t \to 0}\left(\dfrac{\sin(t)}{t}\right)^2 = 1$, ainsi $t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

(b) La fonction $t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est continue sur $[1, +\infty[$, l'intégrale considérée n'est donc généralisée qu'en $+\infty$, or pour $t \geq 1$ on a : $\left|\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2\right| \leq \frac{1}{t^2}$, comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathsf{d}t$ est convergente, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathsf{d}t$ est absolument convergente donc convergente.

(c) La fonction $t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est positive et continue sur $\mathbb{R}_+^\star$, on a vu en 1°(a) qu'elle était prolongeable par continuité en 0 donc $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathsf{d}t$ est convergente, comme il en va de même, d'après 1°(b), pour $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathsf{d}t$. La fonction $t \mapsto \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(d) Posons, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in]0, +\infty[$, $g(x,t) = \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 \mathrm{e}^{-xt}$. Appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètres. On a :

— Pour $x \geq 0$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

— Pour $t > 0$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

— Hypothèse de domination : Pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $t > 0$, $|g(x,t)| \leq \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 = \varphi(t)$. Or, d'après 1°(c), φ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$

Ainsi f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

2° (a) i. Soit $t \geq 0$. La fonction sin est continue sur $[0, t]$ et est dérivable sur $]0, t[$, ainsi d'après le théorème des accroissements il existe $c \in]0, t[$ tel que $\sin(t) - \sin(0) = \sin'(c)(t - 0)$ donc $|\sin(t)| = |\cos(c)|\,|t| \leq |t|$. Ainsi on a bien : : $\forall t \geq 0,\ 0 \leq |\sin(t)| \leq t$.

ii. Soit $t > 0$. L'inégalité de la la question précédente et la croissance de la fonction carré donne $\sin^2(t) \leq t^2$ ie $\frac{\sin^2(t)}{t} \leq t$, comme de plus $xt \geq at$, par croissance d'exponentielle on a donc : $0 \leq \frac{\sin^2(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt} \leq t\mathrm{e}^{-at}$.

iii. Comme $0 \leq \sin^2 \leq 1$ et comme $0 \leq \mathrm{e}^{-xt} \leq \mathrm{e}^{-at}$, on a donc $0 \leq \sin^2(t)\mathrm{e}^{-xt} \leq \mathrm{e}^{-at}$.

(b) Appliquons le théorème de dérivation $\mathcal{C}^2$ sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}_+^\star$. On a :

— Pour $t>0$, $x\mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^\star$, de plus pour $x>0$, on a $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)=\frac{-\sin^2(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)=\sin^2(t)\mathrm{e}^{-xt}$.

— Pour $x>0$, $t\mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$ (d'après 1°(d)). il en va de même pour $t\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$, en effet pour $x\in$ et $t>0$ on a (cf 2°(a).ii) $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|=\frac{\sin^2(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}\leq t\mathrm{e}^{-at}$. La fonction $t\mapsto t\mathrm{e}^{-at}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ (faussement généralisée en 0 et petit o de $\frac{1}{t^2}$ en $+\infty$), ce qui montre que $t\mapsto\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

— Pour $x>0$, $t\mapsto\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

— Hypothèse de domination sur $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)$.
Pour $x\in[a,b]$ et $t>0$, on a (d'après 2°(a)iii) $\left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)\right|\leq\mathrm{e}^{-at}=\varphi_a(t)$ et φ_a est bien continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}_+^\star$ donc sur $\mathbb{R}_+^\star$, de plus pour $x>0$, on a $f''(x)=\int_0^{+\infty}\sin^2(t)\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$.

3° (a) Pour $\theta\in\mathbb{R}$ et $x>0$, on a : $\left|\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\theta-x)t}\right|=\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta t}\right|\left|\mathrm{e}^{-xt}\right|=\mathrm{e}^{-xt}$.

(b) Pour $\theta\in\mathbb{R}$ et $x>0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-xt}=0$, ainsi $\lim\limits_{t\to+\infty}|\mathrm{e}^{(\mathrm{i}\theta-x)t}|=0$.

(c) Soit $x>0$. Pour $t>0$, $\sin^2(2)=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}\right)^2=\frac{-1}{4}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}-2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t})$. Ainsi on a : $f''(x)=\dfrac{-1}{4}\displaystyle\int_0^{+\infty}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}-2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t=\dfrac{-1}{4}\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{(2\mathrm{i}-x)t}-2\mathrm{e}^{-xt}+\mathrm{e}^{(-2\mathrm{i}-x)t}\mathrm{d}t=\dfrac{-1}{4}\left[\dfrac{\mathrm{e}^{(2\mathrm{i}-x)t}}{2\mathrm{i}-x}-2\dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{-x}+\dfrac{\mathrm{e}^{(-2\mathrm{i}-x)t}}{-2\mathrm{i}-x}\right]_0^{+\infty}$.
Ainsi, avec la limite de la question précédente on a : $f''(x)=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2\mathrm{i}-x}-2\dfrac{1}{-x}+\dfrac{1}{-2\mathrm{i}-x}\right)=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{4}\dfrac{-2\mathrm{i}-x+2\mathrm{i}-x}{(-2\mathrm{i}-x)(2\mathrm{i}-x)}=\dfrac{1}{2x}-\dfrac{x}{2(x^2+4)}$.

4° (a) Pour $x>0$, comme pour tout $t>0$, $0\leq g(x,t)\leq\mathrm{e}^{-xt}$ (on a juste utilisé $|\sin(t)|\leq|t|$), et comme $t\mapsto\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on a donc $0\leq f(x)\leq\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t=\left[\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{-x}\right]_0^{+}\infty=0+\frac{1}{x}$, ainsi, d'après le théorème des gendarmes on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

(b) On procède de même, pour $x>0$, $f'(x)=-\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}t$. Comme pour $t>0$, on a $\left|\frac{\sin^2(t)}{t}\right|\leq\left|\frac{\sin(t)}{t}\right||\sin(t)|\leq1$. On en déduit donc le même encadrement $0\leq-f'(x)\leq\frac{1}{x}$ et donc que $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(c) La fonction G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $t\in\mathbb{R}$ on a $G'(t)=\ln(t^2+4)+t\frac{2t}{t^2+4}-2+4\frac{1/2}{1+t^2/4}=\ln(t^2+4)+\frac{2t^2}{t^2+4}-2+\frac{8}{t^2+4}=\ln(t^2+4)+\frac{2t^2-2t^2-8+8}{t^2+4}=\ln(t^2+4)$.

(d) On a montré, à la question 3°(c), pour tout $x>0$ que $f''(x)=\frac{1}{2x}-\frac{x}{2(x^2+4)}$. Ainsi il existe une constante $c\in\mathbb{R}$ telle que pour tout $x>0$ on ait : $f'(x)=\frac{1}{2}\ln(x)-\frac{1}{4}\ln(x^2+4)+c$. Ainsi $f'(x)=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right)+c\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}c$, or, d'après 4°(b), $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, ainsi $c=0$. On a donc l'existence de $d\in\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x>0$, on ait : $f(x)=\frac{1}{2}(x\ln(x)-x)-\frac{1}{4}G(x)+d$. Ainsi $f(x)=\frac{1}{4}\left(2x\ln(x)-2x-x\ln(x^2+4)+2x-4\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)+d=\frac{x}{4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+4}\right)-\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+d$. Or $\dfrac{x}{4}\ln\left(\dfrac{x^2}{x^2+4}\right)=\dfrac{x}{4}\ln\left(1-\dfrac{4}{x^2+4}\right)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{-4x}{x^2+1}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$ ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty}(x)=\dfrac{-\pi}{2}+d$, et avec le résultat de 4°(a) on en déduit donc que $d=\frac{\pi}{2}$.
On a donc : $\forall x>0$, $f(x)=\dfrac{1}{2}(x\ln(x)-x)-\dfrac{1}{4}G(x)+\dfrac{\pi}{2}$.

5° Tout d'abord on remarque que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2\mathrm{d}t=f(0)$. Comme on a montré à la question 1°(d) que f était continue sur $\mathbb{R}_+$, donc en 0, on a que $f(0)=\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2}(x\ln(x)-x)-\dfrac{1}{4}G(x)+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$ (par croissance comparée et car $\arctan(0)=0$). Ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$.