DS $6^\star$: samedi 10 février

4h sans calculatrice

Le candidat numérotera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1 *(Résolution d'une équation fonctionnelle :* CCINP PC 2021 *Exercice 2)***.**
Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \text{ et } \forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x+1)+f(x) = \frac{1}{x^2}. \qquad (P)$$

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

I.1 - Existence de la solution

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

1° Montrer que la série de fonctions $\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

Dans tout les reste de cet exercice, on note $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la somme de la série $\sum_{k\geq 0} \varphi_k$.

2° Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $\varphi(x+1)+\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$.

3° En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

4° Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

I.2 - Unicité de la solution

5° Montrer que si $f :]0,+\infty \to \mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

6° En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

Correction :

1° Pour $x>0$ fixé on a $|\varphi_k(x)| \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{1}{k^2}$, ainsi $\sum \varphi_k(x)$ converge absolument donc converge, ce qui montre bien la convergence simple de $\sum \varphi_k$ sur $]0,+\infty[$.
Alternative : On peut aussi utiliser le TSA directement ici, ce qui fait gagner un peut de temps pour la question 3°.

2° Pour $x>0$, on a : $\varphi(x+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+1+k)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(x+k)^2} = -(\varphi(x)-\varphi_0(x)) = -\varphi(x) + \frac{1}{x^2}$. Ce qui montre bien que $\varphi(x+1)+\varphi(x) = \frac{1}{x^2}$.

3° Pour $x > 0$, la série $\sum \varphi_k(x)$ est une série alternée qui relève du TSA (elle est bien alternée et $(|\varphi_k(x)|)_k = \left(\frac{1}{(x+k)^2}\right)_k$ tend bien vers 0 en décroissant), ce qui donne non seulement la convergence de la série, mais aussi la domination du reste, ie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en notant $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)$, que $|R_n(x)| \leq |\varphi_{n+1}(x)| = \frac{1}{(x+n+1)^2}$.

4° Pour $x > 0$ on a $R_0(x) = \varphi(x) - \varphi_0(x)$, la question précédente donne donc $\left|\varphi(x) - \frac{1}{x^2}\right| \leq \frac{1}{(x+1)^2}$, ainsi $\varphi - \varphi_0$ admet 0 comme limite en $+\infty$, et comme φ_0 tend aussi vers 0 en $+\infty$ on a donc $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = 0$, ce qui montre, avec la question 2°, que φ est une solution de (P).
Alternative : La question précédente permet de montrer la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^\star$ de (R_n) vers la fonction nulle, ainsi $\sum \varphi_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+^\star$, comme de plus tous les φ_k tendent vers 0 en $+\infty$, on peut appliquer le théorème de la double limite pour avoir le résultat.

5° Soit f une solution de (P). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, la relation de (P) appliquée à $x + k$ donne : $f(x + k + 1) - f(x + k) = \frac{1}{(x+k)^2}$, on multiplie ces égalités par $(-1)^k$ et on somme pour obtenir : $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k f(x+k+1) + (-1)^k f(x+k) = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1} f(x+k) + \sum_{k=0}^{n}(-1)^k f(x+k) = (-1)^n f(x+n+1) - \sum_{k=1}^{n}(-1)^k f(x+k) + f(x) + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k f(x+k) = (-1)^n f(x+n+1) + f(x)$. Ce qui montre bien que $f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$.
Alternative : Démonstration par récurrence sur n.

6° On vient de démontrer, pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ que $f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x)$, il ne reste plus qu'a faire tendre n vers $+\infty$, ce qui est possible à droite puisque $\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1} f(x+n+1) = 0$ (premier résultat de la propriété (P)) et que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x) = \varphi(x)$. Ainsi $f(x) = \varphi(x)$, et donc $f = \varphi$, ce qui montre bien que φ est l'unique solution de (P).

Partie II - Étude de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ du problème (P).

7. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k\geq 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$.
8. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0, +\infty[$. En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+.
9. Justifier que la fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

10. En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0, +\infty[$.
11. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer que :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}.$$

En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.

Correction :

7° Pour $x > \varepsilon$ et $k \in \mathbb{N}$, on a $|\varphi_k(x)| = \frac{1}{(x+k)^2} \leq \frac{1}{(\varepsilon+k)^2}$, ainsi $\|\varphi_k\|_\infty^{[\varepsilon,+\infty[} \leq \frac{1}{(\varepsilon+k)^2}$. Ainsi la série $\sum \varphi_k$ converge normalement (donc uniformément) sur $[\varepsilon, +\infty[$.
Alternative Utiliser 3° pour avoir la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^\star$ de (R_n) vers la fonction nulle.

8° Comme toutes les fonctions φ_k sont continues sur $[\varepsilon,+\infty[$ et que la convergence de la série $\sum\varphi_k$ y est uniforme on a que φ est continue sur $[\varepsilon,+\infty[$, ceci étant vrai pour tout $\varepsilon>0$, on a donc φ continue sur $]0,+\infty[$.
Comme φ vérifie la propriété (P), pour tout $x>0$ on a : $x^2\varphi(x+1)+x^2\varphi(x)=1$, or $\lim\limits_{x\to0}x^2\varphi(x+1)=0$ (par continuité de φ en 1) on a donc $\lim\limits_{x\to0}x^2\varphi(x)=1$, ie $\varphi(x)\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{1}{x^2}$.

9° Appliquons le théorème de dérivation $\mathcal{C}^1$ des séries de fonctions. On a :

(i) Pour tout $k\in\mathbb{N}$, φ_k est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]0,+\infty[$ et, pour $x>0$, $\varphi_k'(x)=\frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$.

(ii) $\sum\varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers φ.

(iii) Soit $\varepsilon>0$, pour $k\in\mathbb{N}$ et $x\in[\varepsilon,+\infty[$, on a $|\varphi_k'(x)|\leq\frac{2}{(\varepsilon+k)^3}$, ainsi $\|\varphi_k'\|_\infty^{[\varepsilon,+\infty[}\leq\frac{2}{(\varepsilon+k)^3}$ et comme $\sum\frac{2}{(\varepsilon+k)^3}$ converge on a que $\sum\varphi_k'$ converge normalement (donc uniformément) sur $[\varepsilon,+\infty[$.

Ainsi φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon,+\infty[$, ceci étant vérifié pour tout $\varepsilon>0$, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $,+\infty[$, de plus, pour $x>0$, on a : $\varphi'(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\varphi_k'(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$.

10° Pour $x>0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$ est une série alternée qui relève du TSA (son terme général est bien alternée et en valeur absolue est décroissant et tend vers 0), ainsi sa somme est du signe de son premier terme, ce qui montre $\varphi'(x)\leq0$ et donc φ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

11° Pour $x>1$ on a $\varphi(x+1)\leq\varphi(x)\leq\varphi(x-1)$ (décroissance) en ajoutant $\varphi(x)$ on a $\varphi(x+1)+\varphi(x)\leq2\varphi(x)\leq\varphi(x)+\varphi(x-1)$, comme de plus φ vérifie la propriété (P) on a donc $\frac{1}{x^2}\leq2\varphi(x)\leq\frac{1}{(x-1)^2}$, il ne reste plus qu'à multiplier par x^2 pour obtenir $1\leq2x^2\varphi(x)\leq\frac{x^2}{(x-1)^2}\underset{x\to+\infty}{\sim}1$, il ne reste plus qu'à appliquer le théorème des gendarmes pour obtenir $\lim\limits_{x\to+\infty}2x^2\varphi(x)=1$, ie : $\varphi(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2x^2}$.

Partie III - Expression intégrale de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on déterminer une expression de φ sous la forme d'une intégrale. On considère un élément $x\in]0,+\infty[$.

12° Pour tout $k\in\mathbb{N}$, montrer que la fonction $t\mapsto t^{x+k-1}\ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et que l'on a :

$$\int_0^1 t^{x+k-1}\ln(t)\mathsf{d}t=-\frac{1}{(x+k)^2}.$$

13° En déduire que la fonction $t\mapsto\frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0,1]$ et que :

$$\varphi(x)=-\int_0^1\frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}\mathsf{d}t.$$

Correction :

12° Soit $k\in\mathbb{N}$. Posons $\varepsilon>0$, la fonction $t\mapsto t^{x+k-1}\ln(t)$ est continue sur $[\varepsilon,1]$, elle est donc intégrable sur cet intervalle, procédons par intégration par parties, pour $t\in[\varepsilon,1]$ posons $u(t)=\ln(t)$ et $v(t)=\frac{t^{x+k}}{x+k}$, u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\varepsilon,1]$ et pour $t\in[\varepsilon,1]$ on a $u'(t)=\frac{1}{t}$ et $v'(t)=t^{x+k-1}$. Ainsi $\displaystyle\int_\varepsilon^1 t^{x+k-1}\ln(t)\mathsf{d}t=\left[\frac{t^{x+k}}{x+k}\ln(t)\right]_\varepsilon^1-\int_\varepsilon^1\frac{t^{x+k}}{x+k}\frac{1}{t}\mathsf{d}t=0-\frac{\varepsilon^{x+k}}{x+k}\ln(\varepsilon)-\frac{1}{x+k}\int_\varepsilon^1 t^{x+k-1}\mathsf{d}t=-\frac{\varepsilon^{x+k}}{x+k}\ln(\varepsilon)-\frac{1}{x+k}\left[\frac{t^{x+k}}{x+k}\right]_\varepsilon^1=-\frac{\varepsilon^{x+k}}{x+k}\ln(\varepsilon)-\frac{1}{(x+k)^2}+\frac{\varepsilon^{x+k}}{(x+k)^2}\underset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}\frac{-1}{(x+k)^2}$.
Ce qui montre bien la convergence de l'intégrale sur $]0,1]$ (et donc l'intégrabilité puisque la fonction est de signe constant) et la formule.

13° On vient de démontrer, pour tout $x>0$, que $\varphi(x)=-\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1(-1)^k t^{x+k-1}\ln(t)\mathsf{d}t$. De plus on peut tout de suite remarquer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^{x+k-1}\ln(t)=t^{x-1}\ln(t)\sum_{k=0}^{+\infty}(-t)^k=\frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$ (série géométrique). Appliquons le théorème d'intégration terme à terme, pour cela on note, pour $k\in\mathbb{N}$ et $t\in]0,1[$, $f_k(t)=(-1)^k t^{x+k-1}\ln(t)$.
On a :

(i) Toutes les fonctions f_k sont continues par morceaux et intégrables sur $]0,1]$.

(ii) $\sum_{k\geq 0} f_k$ converge simplement vers $S : t \mapsto \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$ sur $]0,1[$.

(iii) La fonction S est continue par morceaux sur $]0,1[$.

(iv) Pour $k \in \mathbb{N}$, notons $a_k = \int_0^1 ||| f_k(t)|\mathrm{d}t$, d'après la question précédente $a_k = \frac{1}{(x+k)^2}$, ainsi $\sum a_k$ converge

Ainsi S est intégrable sur $]0,1[$ (donc sur $]0,1]$ puisque définie en 1) et $\displaystyle\int_0^1 S(t)\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_0^1 f_k(t)\mathrm{d}t$.

On a bien montré que : $\forall x > 0$, $\varphi(x) = -\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}\mathrm{d}t$.

Exercice 2 *(Théorème de la Limite Centrale :* MINES PC-PSI 2010, *maths 1, sujet de 3h).*

Notations.

On introduit les trois espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ de fonctions suivants.

- $C_0(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} u(x)$.
  On rappelle qu'une telle fonction u est nécessairement bornée sur $\mathbb{R}$.
- $C_0^\infty(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions de classe C^∞ (sur $\mathbb{R}$) u de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} u^{(k)}(x) = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} u^{(k)}(x)$.
  On a noté $u^{(k)}$ la dérivée k-ième de u.
- $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions continues positives et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont l'intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à 1.

On munit $C_0(\mathbb{R})$ de la norme de la convergence uniforme $\|.\|_\infty$: plus précisément, pour toute fonction $u \in C_0(\mathbb{R})$, on pose : $\|u\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |u(x)|$.

On pourra utiliser librement le théorème de Fubini *admis* ci-dessous :

Théorème 1. *(Fubini) Soit $(x,y) \mapsto F(x,y)$ une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que F vérifie les trois propriétés suivantes.*

1) Pour tous réels x, y, les deux intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(v,y)|\,\mathrm{d}v$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,t|\,\mathrm{d}t$ convergent.

2) Les fonctions $y \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)|\,\mathrm{d}x$, $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)|\,\mathrm{d}y$, $y \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\,\mathrm{d}x$, $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\,\mathrm{d}y$ sont toutes continues sur $\mathbb{R}$.

3) $y \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)|\,\mathrm{d}x$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, c'est à dire que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,y)|\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$ converge.

Alors, dans ce cas, $y \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\,\mathrm{d}x$ et $x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\,\mathrm{d}y$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ et leurs intégrales sur $\mathbb{R}$ sont égales. Autrement dit, on peut intervertir les deux intégrales :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

I] Préliminaires.

Pour f et g appartenant respectivement à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $C_0(\mathbb{R})$, on définit le produit de convolution $f * g$ par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$$

On définit $f * g(x)$ par la même formule si $f \in C_0(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Q1. Soient $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $g \in C_0(\mathbb{R})$. Montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$ converge pour tout réel x. Puis montrer que $f * g$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$. (On pourra utiliser le théorème de continuité sous les signe $\int$ et on vérifiera avec soin que les conditions de validité sont remplies). Vérifier de plus que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f * g(x) = g * f(x)$$

Q2. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f * g(x) = 0$. (On considèrera une suite réelle quelconque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$. On vérifiera avec soin qu'on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} f * g(x_n)$).
Montrer de même que $\lim\limits_{x\to-\infty} f * g(x) = 0$

Q3. Soient f et g appartenant à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Montrer alors que $f * g$ définit une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Plus précisément, montrer que $f*g$ définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$, bornée, positive et d'intégrale égale à 1. (On appliquera le théorème de Fubini à la fonction $(x, y) \mapsto f(y)g(x-y)$ et on pourra se contenter de ne vérifier que les conditions 1) et 3)).

Dans la suite, on admettra et on utilisera librement le résultat suivant. Si f et g appartiennent à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et u est une fonction de $C_0(\mathbb{R})$ alors, $f * (g * u) = (f * g) * u$.
Soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. On définit alors le produit de convolution $f_1 * \cdots * f_n$ par récurrence comme suit : $f_1 * \cdots * f_k = (f_1 * \cdots * f_{k-1}) * f_k,\ \forall k \in \{3, \dots, n\}$.
Il est clair que $f_1 * \cdots * f_n$ est une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
Dans la suite, on notera f^{*n} la fonction $f * \cdots * f$, la fonction f intervenant n fois.

Correction :

Q1. On peut traiter simultanément les deux premiers points avec le théorème de continuité des intégrales à paramètres. Soient $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ et $g \in C_0(\mathbb{R})$.

- $\forall x \in \mathbb{R},\ t \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall t \in \mathbb{R},\ x \mapsto f(t)g(x-t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ |f(t)g(x-t)| \leq \|g\|_\infty f(t) = \phi(t)$. ϕ est indépendante de x et c'est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ (elle est positive et son intégrale existe et vaut $\|g\|_\infty$ puisque $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$).

Le théorème s'applique et indique que pour tout x, $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (et est donc a fortiori d'intégrale convergente) et $f * g$ est continue : $f * g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

Le changement de variable $u = x - t$ (affine donc licite) montre que $f * g(x) = -\displaystyle\int_{+\infty}^{-\infty} f(x-u)g(u)\ \mathrm{d}u = g * f(x)$.

Q2. Soit (x_n) une suite réelle de limite $+\infty$ ou $-\infty$. Posons $u_n = f*g(x_n)$; en notant $h_n\ :\ t \mapsto f(t)g(x_n - t)$, on a $u_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t)\ \mathrm{d}t$. Montrons que l'on peut appliquer le théorème de convergence dominée.

- Pour tout n, h_n est continue sur $\mathbb{R}$.
- (h_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle (car f est bornée et g de limite nulle en $+\infty$ et $-\infty$). La limite simple est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, $|h_n(t)| \leq \|g\|_\infty f(t)$. Le majorant est indépendant de n et est intégrable sur $\mathbb{R}$ (comme en question 1).

Le théorème s'applique et donne : $\lim\limits_{n\to+\infty} f * g(x_n) = 0$.

Par caractérisation séquentielle des limites, on a donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f * g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g * f(x) = 0$.

Q3. Soient $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. g est bornée sur $\mathbb{R}$ et on peut ainsi reprendre la question 1 pour voir que $f * g$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
f et g étant positives, on a immédiatement : $f * g$ est positive sur $\mathbb{R}$.
On a aussi $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq f * g(x) \leq \|g\|_\infty \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = \|g\|_\infty$ et donc $f * g$ est bornée sur $\mathbb{R}$
Il nous reste à montrer que $f * g$ a une intégrale sur $\mathbb{R}$ qui converge et qui vaut 1. Pour cela, et comme l'énoncé nous le propose, on va utiliser le théorème de Fubini avec $F\ :\ (x, t) \mapsto f(t)g(x-t)$ qui est continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ (théorèmes généraux à partir des continuités de f et de g) en vérifiant uniquement deux des hypothèses.

1) Pour tout réel x, $|F(x,t)| \leq \|g\|_\infty f(t)$ et comme f est intégrable sur $\mathbb{R}$ (positive d'intégrale convergente), $t \mapsto F(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel t, $|F(x,t)| \leq \|f\|_\infty g(x-t)$. Le changement de variable $u = x-t$ donne $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u)\ \mathrm{d}u = 1$ et donc $x \mapsto g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (positive d'intégrale convergente), $x \mapsto F(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
3) Pour tout réel t (avec la positivité de F et avec le changement de variable évoqué dans le premier point) : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,t)|\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\ \mathrm{d}x = f(t)\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-t)\ \mathrm{d}x = f(t)$.
$t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} |F(x,t)|\ \mathrm{d}x$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}$ et son intégrale vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t = 1$.

Le théorème de Fubini s'applique et donne : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f * g(x)\ \ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,t)\ \mathrm{d}t\right)\ \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x,t)\ \mathrm{d}x\right)\ \mathrm{d}t = 1$.
On a ainsi le dernier point attendu et $f * g \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

II] Une classe d'opérateurs sur $C_0(\mathbb{R})$.

Soit f une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. On lui associe l'opérateur T_f agissant sur $C_0(\mathbb{R})$ défini pour tout $u \in C_0(\mathbb{R})$ par $T_f(u) = f * u$.
D'après **Q1** et **Q2**, T_f est un endomorphisme de $C_0(\mathbb{R})$.

Q4. Soit f une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Prouver que pour tout $u \in C_0(\mathbb{R})$,

$$\|T_f(u)\|_\infty \leq \|u\|_\infty$$

Q5. Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Prouver que pour toute fonction u de $C_0(\mathbb{R})$

$$T_fT_g(u) = T_gT_f(u)$$

où T_fT_g désigne la composée des opérateurs T_f et T_g.

Q6. Soient f_1, f_2, g_1, g_2 des fonctions de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Prouver que pour tout $u \in C_0(\mathbb{R})$,

$$\|T_{f_1}T_{f_2}(u) - T_{g_1}T_{g_2}(u)\|_\infty \leq \|T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty + \|T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)\|_\infty$$

Q7. Soient f et g des fonctions de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Prouver que si $u \in C_0(\mathbb{R})$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\|(T_f)^n(u) - (T_g)^n(u)\|_\infty \leq n\|T_f(u) - T_g(u)\|_\infty$$

Correction :

Q4. Soit $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Soit $u \in C_0(\mathbb{R})$;

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |T_f(u)(x)| = |f * u(x)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|u\|_\infty f(t)\, \mathrm{d}t = \|u\|_\infty$$

Le majorant est indépendant de x et un passage à la borne supérieure donne : $\|T_f(u)\|_\infty \leq \|u\|_\infty$.

Q5. Soient $f, g \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Soit $u \in C_0(\mathbb{R})$; avec la commutativité et l'associativité de $*$, on a

$$T_fT_g(u) = f * T_g(u) = f * (g * u) = (g * u) * f = g * (u * f) = g * (f * u) = T_gT_f(u)$$

Q6. Soit $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Soit $u \in C_0(\mathbb{R})$; on a (avec la question précédente pour la seconde relation)

$$T_{f_1}T_{f_2}(u) - T_{f_1}T_{g_2}(u) = T_{f_1}(T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u))$$

$$T_{f_1}T_{g_2}(u) - T_{g_1}T_{g_2}(u) = T_{g_2}T_{f_1}(u) - T_{g_2}T_{g_1}(u) = T_{g_2}(T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u))$$

On passe à la norme infinie, on utilise la question 4, puis on somme et on utilise l'inégalité triangulaire pour obtenir

$$\begin{aligned} \|T_{f_1}T_{f_2}(u) - T_{g_1}T_{g_2}(u)\|_\infty &\leq \|T_{f_1}T_{f_2}(u) - T_{f_1}T_{g_2}(u)\|_\infty + \|T_{f_1}T_{g_2}(u) - T_{g_1}T_{g_2}(u)\|_\infty \\ &\leq \|T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty + \|T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)\|_\infty \end{aligned}$$

Q7. On remarque tout d'abord que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (T_f)^n(u) = f * f * \cdots * f * u = f^{*n} * u = T_{f^{*n}}(u)$$

On prouve alors le résultat annoncé par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Initialisation : le résultat est immédiat pour $n = 1$ (on a même une égalité).
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que le résultat est vrai au rang n. La question précédente donne (avec $f_1 = f$, $f_2 = f^{*n}$, $g_1 = g$ et $g_2 = g^{*n}$)

$$\|(T_f)^{n+1}(u) - (T_g)^{n+1}\|_\infty \leq \|T_f(u) - T_g(u)\|_\infty + \|(T_f)^n(u) - (T_g)^n\|_\infty \leq (n+1)\|T_f(u) - T_g(u)\|_\infty$$

On conclut que le résultat est vrai au rang $n + 1$. Ce qui termine l'hérédité et la récurrence.

III] Lois normales.

On introduit pour tout réel $h > 0$ la fonction

$$g_h(x) = \frac{1}{h\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2h^2}},\ x \in \mathbb{R}$$

dite loi normale de paramètre h. On admet que g_1 est une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Q8. Pour tout $h > 0$, montrer que g_h est une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, puis calculer les deux intégrales suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x g_h(x)\,\mathsf{d}x \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_h(x)\,\mathsf{d}x$$

Soient $h_1 > 0$ et $h_2 > 0$ deux réels strictement positifs. On admettra que :

$$g_{h_1} * g_{h_2} = g_h$$

où $h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$.

Q9. Soit $h > 0$. Établir les deux égalités suivantes entre opérateurs.

$$T_{g_h} = \left(T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}}\right)^n = T_{(g_{\frac{h}{\sqrt{n}}})^{*n}}$$

Correction :

Q8. g_h est continue positive et bornée (majorée par $\frac{1}{h\sqrt{2\pi}}$). C'est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ (seuls problèmes aux voisinages des infinis où g_h est négligeable devant $1/x^2$ par croissances comparées). De plus, le changement de variable $u = \frac{x}{h}$ donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_h(x)\,\mathsf{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathsf{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} g_1(u)\,\mathsf{d}u = 1$$

On en déduit que : $\forall h > 0,\ g_h \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
$x \mapsto x g_h(x)$ et $x \mapsto x^2 g_h(x)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ (seuls problèmes aux voisinages des infinis où les fonctions sont négligeables devant $1/x^2$ par croissances comparées). Les intégrales proposées existent donc.
On a directement, par imparité de la fonction (et sachant que l'intégrale existe) : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x g_h(x)\,\mathsf{d}x = 0$.
Par ailleurs, une intégration par parties donne

$$\int_a^b x^2 g_h(x)\,\mathsf{d}x = \left[-\frac{hx}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2h^2}}\right]_a^b + \frac{h}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2h^2}}\,\mathsf{d}x = \left[-\frac{hx}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2h^2}}\right]_a^b + h^2\int_a^b g_h(x)\,\mathsf{d}x$$

En faisant tendre a vers $-\infty$ et b vers $+\infty$ (les intégrales existent) on a alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_h(x)\,\mathsf{d}x = h^2$$

Q9. Comme on l'a remarqué en question 7, $\left(T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}}\right)^n = T_{(g_{\frac{h}{\sqrt{n}}})^{*n}}$. Par ailleurs, on a (récurrence quasi immédiate avec le résultat admis par l'énoncé)

$$g_{h_1} * g_{h_2} * \cdots * g_{h_n} = g_h \quad \text{avec} \quad h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2}$$

et en particulier $(g_{\frac{h}{\sqrt{n}}})^{*n} = g_h$ ce qui donne : $\left(T_{g_{\frac{h}{\sqrt{n}}}}\right)^n = T_{(g_{\frac{h}{\sqrt{n}}})^{*n}} = T_{g_h}$.

IV] Convergence faible sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Définition : soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. On dira que (f_n) converge faiblement vers f, f étant une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, si pour toute fonction u de $C_0(R)$,

$$\lim_{n\to+\infty} \|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_\infty = 0$$

Soit u une fonction de $C_0(\mathbb{R})$. On fixe un réel $h > 0$ et on considère la fonction $T_{g_h}(u)\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour x réel par :

$$(g_h * u)(x) = T_{g_h}(u)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t)u(x-t)\,\mathsf{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(x-t)u(t)\,\mathsf{d}t$$

où g_h a été défini au début de la partie 3.

Q10. Soit h strictement positif fixé et $k \in \mathbb{N}$. Démontrer qu'il existe un polynôme $P_{k,h}$ dont on précisera le degré tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\mathsf{d}^k}{\mathsf{d}x^k} g_h(x) = P_{k,h}(x)e^{-\frac{x^2}{2h^2}}$$

Q11. Soient $h, a \in \mathbb{R}^{+*}$ et k un entier positif ou nul. Prouver qu'il existe une fonction $\phi_k : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in [-a, a],\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left| P_{k,h}(x-t) e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}} \right| \leq \phi_k(t)$$

La fonction ϕ_k ne dépend que de h, a et k. (On pourra majorer $\left| P_{k,h}(x-t) e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}} \right|$ indépendamment de $(x-t)$. Ensuite on pourra majorer convenablement $e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}}$ pour $|t| \geq 2a$ et $x \in [-a, a]$).

Q12. Soient h strictement positif fixé et $u \in C_0(\mathbb{R})$. Démontrer que $T_{g_h}(u)$ est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Puis montrer que $T_{g_h}(u)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Q13. Pour h strictement positif fixé et $u \in C_0(\mathbb{R})$, démontrer que $T_{g_h}(u)$ est une fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Q14. Soit α un réel strictement positif. Déterminer $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t)\, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \int_{\alpha}^{+\infty} g_h(t)\, \mathrm{d}t$

Q15. Soit $u \in C_0(\mathbb{R})$. Prouver que

$$\lim_{h\to 0^+} \|T_{g_h}(u) - u\|_\infty = 0$$

Pour cela, on utilisera la question précédente ainsi que le résultat admis suivant, valable pour tout $u \in C_0(\mathbb{R})$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0 /\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ |x-y| \leq \alpha\ \Rightarrow\ |u(x) - u(y)| \leq \varepsilon$$

Q16. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ et f une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. on suppose que pour toute fonction u de $C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to+\infty} \|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_\infty = 0$$

Prouver alors que (f_n) converge faiblement vers f. (On pourra utiliser les questions 4 et 15).

Dans la suite, f est une fonction de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ telle que $x \mapsto x^2 f(x)$ est aussi dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, \mathrm{d}t$ converge et on supposera que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\, \mathrm{d}t = 0$. Pour tout entier n strictement positif, on introduit les deux fonctions f_n et $f_n^\#$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \sqrt{n} f(\sqrt{n} x),\ f_n^\#(x) = n x^2 f_n(x)$$

On admettra que f_n et $f_n^\#$ appartiennent à $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Q17. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Vérifier que $\frac{u(x-t)-u(x)+tu'(x)}{t^2}$ se prolonge continûment en $t = 0$. Puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$n(T_{f_n}(u)(x) - u(x)) - \frac{1}{2} u''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u(x-t) - u(x) + tu'(x)}{t^2} - \frac{1}{2} u''(x) \right) f_n^\#(t)\, \mathrm{d}t$$

où u' désigne la dérivée première de u et u'' désigne la dérivée seconde de u.

Q18. Démontrer que pour toute fonction u de $C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| n(T_{f_n}(u) - u) - \frac{1}{2} u'' \right\|_\infty = 0$$

(On pourra considérer les trois intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{-\alpha}$, $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha}$, $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty}$, avec $\alpha > 0$ bien choisi, dans le second membre de la formule de la question précédente).

Q19. Montrer que pour toute fonction u de $C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n\to+\infty} \|T_{f_n}^n(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty = 0$$

où g_1 a été définie au début de la partie 3. (On pourra utiliser les questions 7,9 et 18). Conclure que la suite (f_n^{*n}) converge faiblement vers g_1 ; on rappelle que la notation f^{*n} a été définie juste après la question 3.

Ce dernier résultat intervient en théorie des probabilités. Il constitue une version faible du théorème de la limite centrale dans le cas de variables aléatoires à densité de probabilité f continue bornée sur $\mathbb{R}$.

Correction :

Q10. Montrons par récurrence sur k que la propriété

$$\exists\, P_{k,h},\quad \text{polynôme de degré } k,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} g_h(x) = P_{k,h}(x) e^{-\frac{x^2}{2h^2}}$$

est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : le résultat est vrai au rang 0 avec $P_{0,h} = \frac{1}{h\sqrt{2\pi}}$ qui est un polynôme constant non nul et donc de degré 0.
- Hérédité : supposons le résultat acquis à un rang $k-1 \geq 0$. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{\mathsf{d}^k}{\mathsf{d}x^k} g_h(x) = (P'_{k-1,h}(x) - \frac{x}{h^2} P_{k-1,h}(x)) e^{-\frac{x^2}{2h^2}}$$

Posons $P_{k,h}(x) = P'_{k-1,h}(x) - \frac{x}{h^2} P_{k-1,h}(x)$. C'est un polynôme de degré k (somme d'un polynôme de degré k et d'un de degré $\leq k-1$) qui vérifie la propriété voulue.

Q11. La fonction $s_{k,h}\ :\ u \mapsto P_{k,h}(u) e^{-\frac{u^2}{4h^2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de limite nulle aux infinis (croissances comparées). C'est donc une fonction bornée sur $\mathbb{R}$. On a alors,

$$\forall x, t \in \mathbb{R},\ \left| P_{k,h}(x-t) e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}} \right| \leq \|s_{k,h}\|_\infty e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}}$$

On suppose désormais que $|x| \leq a$. Par seconde forme de l'inégalité triangulaire indique que $|x-t| \geq |t| - |x| \geq |t| - a$. Si $|t| \geq a$, ces termes sont positifs et par croissance de $u \mapsto u^2$ sur $\mathbb{R}^+$ on a donc $(x-t)^2 \geq (|t|-a)^2$. On en déduit que pour $|t| \geq a$, $e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}} \leq e^{-\frac{(|t|-a)^2}{4h^2}}$. Par ailleurs, pour $|t| < a$, on a $e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}} \leq 1$. Posons donc

$$\phi_k(t) = \begin{cases} \|s_{k,h}\|_\infty & \text{si } \ |t| < a \\ \|s_{k,h}\|_\infty e^{-\frac{(|t|-a)^2}{4h^2}} & \text{sinon} \end{cases}$$

On obtient une fonction continue par morceaux, négligeable devant $1/t^2$ aux voisinages des infinis et donc intégrable sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$\forall x \in [-a,a],\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left| P_{k,h}(x-t) e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}} \right| \leq \phi_k(t)$$

ϕ_k ne dépend effectivement que de h, k et a.

Q12. Soit $h > 0$ et soit $u \in C_0(\mathbb{R})$. On veut appliquer le théorème de régularité des intégrales à paramètres.
- Pour tout réel x, $t \mapsto g_h(x-t)u(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (cela a été prouvé en question 1).
- Pour tout réel t, $x \mapsto g_h(x-t)u(t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée k-ième est la fonction $x \mapsto P_{k,h}(x-t) e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}} u(t)$.
- Pour tout segment $[-a,a]$, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la question 11 donne une domination de la dérivée k-ième précédente par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et cette domination est uniforme vis à vis de $x \in [-a,a]$.

$T_{g_h}(u)$ est alors de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-a,a]$ pour tout a et est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \frac{\mathsf{d}^k}{\mathsf{d}x^k} T_{g_h}(u)\ :\ x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} P_{k,h}(x-t) e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}} u(t)\ \mathsf{d}t$$

Q13. Soit $f_{k,h}\ :\ u \mapsto P_{k,h}(u) e^{-\frac{u^2}{2h^2}}$. Les fonctions $f_{k,h}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$ (continues et dominées par $1/u^2$ au voisinage des infinis). Comme en questions 1 et 2, on peut écrire (l'hypothèse $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ peut être remplacée par l'intégrabilité de f et les quantités écrites continuent à exister et à vérifier les propriétés des questions 1 et 2) : $\frac{\mathsf{d}^k}{\mathsf{d}x^k} T_{g_h}(u)(x) = f_{k,h} * u(x) \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$. On a donc montré que

$$T_{g_h}(u) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$$

Q14. Soit $\alpha > 0$. Si $t \geq \alpha$ alors $t^2 \geq t\alpha$ et donc : $\forall x \geq \alpha,\ 0 \leq g_h(t) \leq \dfrac{1}{h\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha t}{2h^2}}$. Les fonctions considérées étant intégrables au voisinage de $+\infty$, on peut intégrer les inégalités précédentes et on obtient

$$0 \leq \int_\alpha^{+\infty} g_h(t)\ \mathsf{d}t \leq \left[-\frac{2h^2}{\alpha h\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha t}{2h^2}} \right]_\alpha^{+\infty} = \frac{2h}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2h^2}} \leq \frac{2h}{\alpha\sqrt{2\pi}}$$

Par théorème d'encadrement, on a donc : $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \int_\alpha^{+\infty} g_h(t)\ \mathsf{d}t = 0$. La fonction g_h étant paire, on en déduit aussi que : $\displaystyle\lim_{h \to 0^+} \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t)\ \mathsf{d}t = 0$

Q15. Soit $u \in C_0(\mathbb{R})$. On va prouver le résultat demandé en revenant à la définition des limites. On se donne donc $\varepsilon > 0$. La propriété admise nous donne $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x-y| \leq \alpha \ \Rightarrow\ |u(x)-u(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

La question précédente (α est maintenant connu et fixé) donne $r > 0$ tel que

$$\forall h \in]0,r],\ 0 \leq \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t)\ \mathsf{d}t \leq \frac{\varepsilon}{8\|u\|_\infty} \ \text{ et }\ 0 \leq \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t)\ \mathsf{d}t \leq \frac{\varepsilon}{8\|u\|_\infty}$$

Soit $h \in]0,r]$ et $x \in \mathbb{R}$ quelconque. On a (g_h étant d'intégrale égale à 1)

$$T_{g_h}(u)(x) - u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_h(t)(u(x-t)-u(x))\ \mathsf{d}t$$

On passe au module, on majore par positivité de l'intégrale et on utilise la relation de Chasles pour obtenir (en majorant grossièrement $|u(x-t)-u(x)|$ par $2\|u\|_\infty$)

$$|T_{g_h}(u)(x) - u(x)| \leq \int_{-\alpha}^{\alpha} g_h(t)|u(x-t)-u(x)|\ \mathsf{d}t + 2\|u\|_\infty \left(\int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t)\ \mathsf{d}t + \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t)\ \mathsf{d}t\right)$$

On en déduit alors que

$$|T_{g_h}(u)(x) - u(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha} g_h(t)\ \mathsf{d}t + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

Le majorant étant indépendant de x, on a $\|T_{g_h}(u)-u\|_\infty \leq \varepsilon$. On a prouvé que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\, r > 0/\ \forall h \in]0,r],\ \|T_{g_h}(u)-u\|_\infty \leq \varepsilon$$

c'est à dire que

$$\lim_{h\to 0^+} \|T_{g_h}(u)-u\|_\infty = 0$$

Q16. Soit $u \in C_0(\mathbb{R})$. Écrivons que, pour tout $h > 0$.

$$T_{f_n}(u) - T_f(u) = (T_{f_n}(u) - T_{f_n}T_{g_h}(u)) + (T_{f_n}T_{g_h}(u) - T_fT_{g_h}(u)) + (T_fT_{g_h}(u) - T_f(u))$$

On passe à la norme infinie et on utilise l'inégalité triangulaire et la question 4 pour obtenir

$$\|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_\infty \leq \|u - T_{g_h}(u)\|_\infty + \|T_{f_n}T_{g_h}(u) - T_fT_{g_h}(u)\|_\infty + \|u - T_{g_h}(u)\|_\infty$$

On revient à la définition des limites pour répondre à la question posée. Soit $\varepsilon > 0$; la question précédente nous permet de trouver un $h > 0$ tel que $\|u - T_{g_h}(u)\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$. h étant fixé, $T_{g_h}(u) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et l'hypothèse faite donne un n_0 tel que si $n \geq n_0$ on a $\|T_{f_n}T_{g_h}(u) - T_fT_{g_h}(u)\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}$. On a ainsi

$$\forall n \geq n_0,\ \|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_\infty \leq \varepsilon$$

et on a prouvé que

$$\lim_{n\to+\infty} \|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_\infty = 0$$

Ceci étant vrai pour tout $u \in C_0(\mathbb{R})$: (f_n) converge faiblement vers f

Q.17. $x \in \mathbb{R}$ est ici fixé. D'après la formule de Taylor-Young, on a

$$u(x-t) = u(x) - tu'(x) + \frac{t^2}{2}u''(x) + \underset{t\to 0}{o}(t^2)$$

et ainsi

$$\lim_{t\to 0} \frac{u(x-t) - u(x) + tu'(x)}{t^2} = \frac{u''(x)}{2}$$

Comme f_n est d'intégrale égale à 1, on a

$$n(T_{f_n}(u)(x) - u(x)) = n\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)(u(x-t)-u(x))\ \mathsf{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(x-t)-u(x)}{t^2}\ \mathsf{d}t \qquad (1)$$

Comme $f_n^\#$ est d'intégrale égale à 1 on a aussi

$$-\frac{1}{2}u''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u''(x)}{2} f_n^\#(t)\ \mathsf{d}t \qquad (2)$$

Enfin, comme $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t) = 0$, on a aussi (poser $v = \frac{t}{\sqrt{n}}$) $\int_{-\infty}^{+\infty} vf_n(v)\,\mathrm{d}v = 0$ et donc

$$0 = n\sqrt{n}u'(x)\int_{-\infty}^{+\infty} tf_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u'(x)}{t} f_n^{\#}(t)\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

En sommant les relations (1), (2) et (3), on obtient

$$n(T_{f_n}(u)(x) - u(x)) - \frac{1}{2}u''(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u(x-t) - u(x) + tu'(x)}{t^2} - \frac{1}{2}u''(x)\right) f_n^{\#}(t)\,\mathrm{d}t$$

Q18. Soit $\alpha > 0$ quelconque. On a (en posant $v = \sqrt{n}t$)

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f_n^{\#}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{+\infty} nt^2\sqrt{n}f(\sqrt{n}t)\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{n}\alpha}^{+\infty} v^2 f(v)\,\mathrm{d}v$$

Comme l'intégrale de $v \mapsto v^2 f(v)$ existe sur $\mathbb{R}$, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\alpha}^{+\infty} f_n^{\#}(t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{4}$$

et de façon similaire,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{-\alpha} f_n^{\#}(t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{5}$$

Posons maintenant $g(x,t) = \frac{u(x-t)-u(x)+tu'(x)}{t^2} - \frac{1}{2}u''(x)$. L'inégalité de Taylor-Lagrange donne (u^3 est bornée puisque continue et de limite nulle aux infinis)

$$|u(x-t) - u(x) - tu'(x) - \frac{t^2}{2}u''(x)| \le \frac{|t|^3}{6}\|u^{(3)}\|_\infty$$

et on a donc

$$|g(x,t)| \le \frac{\|u^{(3)}\|_\infty}{6}|t|$$

Soit $\varepsilon > 0$. On a alors, avec la relation précédente (et puisque $f_n^{\#}$ est positive et d'intégrale égale à 1)

$$\left|\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} g(x,t)f_n^{\#}(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{\|u^{(3)}\|_\infty}{6}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|t|f_n^{\#}(t)\,\mathrm{d}t \le \frac{\|u^{(3)}\|_\infty}{6}\varepsilon$$

Les relations (4) et (5) avec $\alpha = \varepsilon$ donnent un rang n_0 à partir duquel les intégrales sont inférieures ou égales à ε^3. De plus

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall |t|\ge\varepsilon,\ |g(x,t)| \le \frac{1}{2}\|u''\|_\infty + \frac{2\|u\|_\infty}{\varepsilon^2} + \frac{\|u'\|_\infty}{\varepsilon}$$

et on a donc, pour $n \ge n_0$,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\varepsilon}^{+\infty} g(x,t)f_n^{\#}(t)\,\mathrm{d}t\right| &\le \left(\frac{1}{2}\|u''\|_\infty + \frac{2\|u\|_\infty}{\varepsilon^2} + \frac{\|u'\|_\infty}{\varepsilon}\right)\int_{\varepsilon}^{+\infty} f_n^{\#}(t)\,\mathrm{d}t \\ &\le \frac{\varepsilon^3}{2}\|u''\|_\infty + 2\|u\|_\infty\varepsilon + \|u'\|_\infty\varepsilon^2\end{aligned}$$

On procède de même avec l'intégrale entre $-\infty$ et $-\alpha$. On a alors

$$\forall n \ge n_0,\ \left|\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,t)f_n^{\#}(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{\|u^{(3)}\|_\infty}{6}\varepsilon + \varepsilon^3\|u''\|_\infty + 4\|u\|_\infty\varepsilon + 2\|u'\|_\infty\varepsilon^2$$

Le majorant est indépendant de x et on peut passer à la borne supérieure. Compte-tenu de la question précédente, on a

$$\forall n \ge n_0,\ \left\|n(T_{f_n}(u) - u) - \frac{1}{2}u''\right\|_\infty \le \frac{\|u^{(3)}\|_\infty}{6}\varepsilon + \varepsilon^3\|u''\|_\infty + 4\|u\|_\infty\varepsilon + 2\|u'\|_\infty\varepsilon^2$$

le majorant est de limite nulle quand ε tend vers 0 et on a donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|n(T_{f_n}(u) - u) - \frac{1}{2}u''\right\|_\infty = 0$$

Q19. Avec les questions 9 puis 7, on a

$$\|T_{f_n}^n(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty = \|T_{f_n}^n(u) - T_{g_{1/\sqrt{n}}}^n(u)\|_\infty \leq n\|T_{f_n}(u) - T_{g_{1/\sqrt{n}}}(u)\|_\infty$$

On écrit alors que $n(T_{f_n}(u) - T_{g_{1/\sqrt{n}}}(u)) = A_n - B_n$ avec

$$A_n = n(T_{f_n}(u) - u) - \frac{1}{2}u'' \quad \text{et} \quad B_n = n(T_{g_{1/\sqrt{n}}}(u) - u) - \frac{1}{2}u''$$

La question précédente donne $\|A_n\|_\infty \to 0$ mais aussi $\|B_n\|_\infty \to 0$ car c'est un cas particulier en choisissant $f = g_1$ (qui vérifie les bonnes hypothèses). On en déduit que $\|A_n - B_n\|_\infty \to 0$, ce qu'il fallait prouver :

$$\lim_{n \to +\infty} \|T_{f_n}^n(u) - T_{g_1}(u)\|_\infty = 0$$

Comme $T_{f_n}^n(u) = T_{f_n^{*n}}$, on se retrouve exactement dans le cadre de la question 16 pour conclure que (f_n^{*n}) converge faiblement vers g_1.