Correction du Concours Blanc « E3A-CCINP » Pc-Psi

Exercice 1 : CCINP PC 2022, exercice 3

Partie I – Construction de la constante d'Euler

Correction :

Q1. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on a $\Delta_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \left(\frac{-1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n^2}$. Ainsi $\boxed{a = \frac{1}{2}}$.

Q2. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann de paramètre $2 > 1$), d'après la règle des équivalents (comme $\frac{-1}{n^2} < 0$, donc de signe constant), on a $\boxed{\sum \Delta_n \text{ converge absolument donc converge}}$.

Q3. On viens de montrer que la série $\sum u_n - u_{n-1}$ converge, or c'est une série télescopique, ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge}}$.
Remarque : Si on veut détailler, il suffit d'écrire, pour $n \geq 2$, $\Delta_n = u_n - u_1$ pour avoir le résultat (et comme $u_1 = 1$, que la limite de (u_n) n'est rien d'autre que 1 plus la somme de la série $\sum \Delta_n$).

Partie II – Expression intégrale de la constante d'Euler

Correction :

Q4. Soit $t > 0$, posons $n_0 = \lfloor t \rfloor + 1$, ainsi $n_0 > t$. Ainsi pour tout $n \geq n_0$ on a $n > t$ et donc $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)$.

Q5. Soit $t > 0$, et soit $n_0 = \lfloor t \rfloor + 1$, ainsi pour $n \geq n_0$ on a (puisque $\frac{t}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$) : $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t) = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} \ln(t) = \mathrm{e}^{n\left(\frac{-t}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)} \ln(t) = \mathrm{e}^{-t + \underset{n\to+\infty}{o}(1)} \ln(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-t} \ln(t) = f(t)$. Ce qui montre bien $\boxed{\text{la convergence simple de } (f_n) \text{ vers } f}$.

Q6. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $t > 0$, si $n \leq t$, on a bien $|f_n(t)| = 0 \leq \mathrm{e}^{-t} |\ln(t)|$, si $n > t$, on a (puisque $\frac{-t}{n} > -1$) : $|f_n(t)| = \left|\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\right| = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} |\ln(t)| \leq \mathrm{e}^{n\frac{-t}{n}} |\ln(t)| = \mathrm{e}^{-t} |\ln(t)|$. On a bien montré que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^\star, \forall t > 0, |f_n(t)| \leq \mathrm{e}^{-t} |\ln(t)|}$.

Q7. La fonction $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-t} |\ln(t)|$ est continue sur $]0, +\infty[$.
— En 0 : On a $\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} -\ln(t)$, comme la fonction ln est intégrable sur $]0, 1]$, il en va de même pour φ.
— En $+\infty$: On a $\varphi(t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, comme $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$, il en va de même pour φ.

En conclusion, $\boxed{\text{la fonction } t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \ln(t) \text{ est intégrable sur }]0, +\infty[}$.

Q8. Pour $n \geq 1$, la fonction $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-t} |\ln(t)|$ domine (d'après Q6) la fonction f_n, de plus (d'après Q7), la fonction φ est intégrable sur $]0, +\infty[$, il en va donc de même pour f_n, ainsi $\boxed{\text{l'intégrale } I_n \text{ est convergente}}$.

Q9. Appliquons le théorème de convergence dominée, on a :
— La suite (f_n) converge simplement (d'après Q5) sur $]0, +\infty[$ vers la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t} \ln(t)$.
— Toutes les fonctions f_n et la fonction f sont continues par morceaux sur $]0, +\infty[$.
— Hypothèse de domination : Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $t > 0$, on a $|f_n(t)| \leq \mathrm{e}^{-t} |\ln(t)| = \varphi(t)$ (d'après Q6) et φ est bien intégrable sur $]0, +\infty[$ d'après Q7.

Ainsi le théorème de convergence dominée s'applique, on a non seulement que toutes les fonctions f_n et f sont intégrables sur $]0,+\infty[$ (montrés aux questions précédentes), mais surtout que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\mathsf{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\mathsf{d}t$, ie $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\mathsf{d}t}$.

Q10. Procédons par intégration par parties, pour $u\in[0,1[$, posons $f(u)=\frac{u^{n+1}-1}{n+1}$ et $g(u)=\ln(1-u)$, les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$, et pour $u\in[0,1[$, $f'(u)=u^n$ et $g'(u)=\frac{-1}{1-u}=\frac{1}{u-1}$.
Or, en posant $u=1+t$, on a $u^{n+1}-1=(1+t)^{n+1}-1=1+(n+1)t+\underset{t\to0}{o}(t)-1\underset{u\to1}{\sim}(n+1)(u-1)$. Ainsi $f(u)g(u)\underset{u\to1}{\sim}-(1-u)\ln(1-u)\underset{u\to1}{\longrightarrow}0$ (par croissance comparée). Ainsi le crochet $\Big[f(u)g(u)\Big]_0^1$ converge (pas de problème en 0 puisque $f(0)g(0)=0$).
Ainsi, par intégration par parties, les intégrales $\int_0^1 f'(u)g(u)\mathsf{d}u$ et $\int_0^1 f(u)g'(u)\mathsf{d}u$ sont de même nature, or $\int_0^1 f(u)g'(u)\mathsf{d}u$ et $\int_0^1(n+1)f(u)g'(u)\mathsf{d}u$ sont de même nature. Ainsi $\boxed{\text{l'intégrale } J_n \text{ est convergente si et seulement si l'intégrale } \int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathsf{d}u \text{ est convergente}}$.
Cette dernière intégrale est faussement généralisée puisque $\mapsto\frac{u^{n+1}-1}{u-1}$ est continue sur $[0,1[$, et qu'on a $\frac{u^{n+1}-1}{u-1}\underset{u\to1}{\longrightarrow}(n+1)$, ainsi elle converge, donc $\boxed{\text{l'intégrale } J_n \text{ converge}}$, et la formule d'intégration par parties donne : $J_n=\Big[f(u)g(u)\Big]_0^1-\int_0^1 f(u)g'(u)\mathsf{d}u$, ainsi $\boxed{J_n=-\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathsf{d}u}$.
Or pour tout u on a $u^{n+1}-1=(u-1)\sum\limits_{k=0}^n u^k$. Ainsi par linéarité de l'intégrale (somme finie d'intégrales propres) on a : $J_n=-\frac{1}{n+1}\int_0^1\sum\limits_{k=0}^n u^k\mathsf{d}u=-\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^n\int_0^1 u^k\mathsf{d}u=-\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^n\frac{1}{k+1}$. On a bien montré (après réindexation) : $\boxed{J_n=-\frac{1}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}}$.

Q11. Procédons au changement de variable $t=n(1-u)$, affine donc licite (bijection strictement décroissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $[0,n]$) : $I_n=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ln(t)\mathsf{d}t=\int_1^0 u^n\ln(n(1-u))(-n)\mathsf{d}u=n\int_0^1 u^n\left(\ln(n)+\ln(1-u))\right)\mathsf{d}u=n\ln(n)\int_0^1 u^n\mathsf{d}u+nJ_n=\frac{n\ln(n)}{n+1}+nJ_n$. Ce qui montre bien que : $\boxed{I_n=\frac{n}{n+1}\ln(n)+nJ_n}$.

Q12. Pour $n\geq2$, on en déduit donc (en utilisant la question Q10) que : $I_n=\frac{n}{n+1}\ln(n)-\frac{n}{n+1}\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}=\frac{-n}{n+1}\left(\frac{1}{n+1}+\sum\limits_{k=1}^n\frac{1}{k}-\ln(n)\right)=\frac{-n}{n+1}\left(\frac{1}{n+1}+u_n\right)$. Ainsi $u_n=-\frac{n+1}{n}I_n-\frac{1}{n+1}$, comme (u_n) converge vers γ, $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ converge vers 1, $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ vers 0, et en utilisant Q9, on en déduit donc que $\boxed{\gamma=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\ln(t)\mathsf{d}t}$.

EXERCICE 2 : CCP PSI 2020, Partie 1

Correction :

Q1. La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $|sin'|=|\cos|\leq1$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis on a, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, que $|\sin(x)-\sin(0)|\leq1\,|x-0|$, ainsi : $\boxed{\forall t\in\mathbb{R}_+,\ |\sin(t)|\leq t}$.

Alternative : le résultat est clairement vrai pour $t \geq 1$, pour $t \in [0,1]$, comme le sinus est positif sur cet intervalle, on peut étudier $\varphi : t \mapsto \sin(t) - t$ (φ est dérivable et $\varphi' = \cos(t) - 1 \leq 0$ donc φ est décroissante, comme $\varphi(0) = 0$, φ est négative).

Q2. Pour $x > 0$ et $t > 0$ on pose $f(x,t) = \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{e}^{-tx}$, $g(x,t) = \mathrm{e}^{-tx}\sin(t)$ et $h(x,t) = \mathrm{e}^{-tx}\cos(t)$.
Soit $x > 0$ fixé, $t \mapsto f(x,t)$, $t \mapsto g(x,t)$ et $t \mapsto h(x,t)$ sont continues sur $]0,+\infty[$, donc les trois intégrales ne sont généralisées qu'en 0 et $+\infty$.

— En 0 les trois fonctions sont prolongeable par continuité ($f(x,t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{t}\mathrm{e}^{-tx} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$, $g(x,0) = 0$ et $h(x,0) = 1$) donc les intégrales sont faussement généralisées en 0.

— En $+\infty$, par croissance comparée on a $t^2 f(x,t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f(x,t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (idem pour g et h), comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge il en va de même pour $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t$ (idem avec g et h).

Ainsi $\boxed{F, G \text{ et } H \text{ sont bien définies sur }]0,+\infty[}$.

Alternative : Soit $x > 0$ fixé, on peut utiliser la question précédente pour montrer pour tout $t > 0$ que $|f(x,t)| \leq \mathrm{e}^{-tx}$, comme on a aussi $|g(x,t)| \leq \mathrm{e}^{-tx}$ et $|h(x,t)| \leq \mathrm{e}^{-tx}$, comme $t \mapsto f(x,t)$, $t \mapsto g(x,t)$ et $t \mapsto h(x,t)$ sont continues sur $]0,+\infty[$, il suffit de montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t$ converge, ce qui est le cas car $x > 0$ (intégrale de référence).

Q3. D'après la question Q1, pour $x > 0$ et $t > 0$ on a $|f(x,t)| \leq \mathrm{e}^{-tx}$, on intègre l'inégalité pour t entre 0 et $+\infty$ (les intégrales convergent d'après la question précédente) : $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x,t|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t$, or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$. Comme $|F(x)| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x,t|\,\mathrm{d}t$, on a $|F(x)| \leq \frac{1}{x}$, ainsi, par théorème de comparaison, on a bien $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0}$.

Alternative : on peut utiliser le théorème de convergence dominée, pour cela on doit passer par le critère séquentielle de la limite, ie introduire $(x_n) \in ([1,+\infty[)^{\mathbb{N}}$ (pour la domination, il est conseillé de prendre $x_n \geq 1$ dès le départ) tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x_n) = 0$

Q4. Utilisons le théorème de dérivation $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètre. On a bien :

— Pour $x > 0$ fixé, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ et y est intégrable (d'après Q2).

— Pour $t \in]0,+\infty[$ fixé, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$, et pour $x > 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)\mathrm{e}^{-tx}$.

— Pour $x > 0$ fixé, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

— Hypothèse de domination, soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^\star$ (ie $0 < a < b$), pour tout $x \in [a,b]$ et pour tout $t \in]0,+\infty[$, on a $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \mathrm{e}^{-ta} = \varphi_{a,b}(t)$, où on a posé $\varphi_{a,b}(t) = \mathrm{e}^{-ta}$. La fonction $\varphi_{a,b}$ est bien positive, continue par morceaux et intégrable (comme intégrale de référence) sur $]0,+\infty[$.

Ainsi F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment donc sur $\mathbb{R}_+^\star$ tout entier et, pour $x > 0$, $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = -G(x)$. On a bien montré $\boxed{F \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^\star \text{ et } F' = -G}$.

Q5. Pour $x > 0$, $H(x) + \mathrm{i}G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\cos(t)\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\sin(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}(\cos(t) + \mathrm{i}\sin(t))\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})t}\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})t}}{-x+\mathrm{i}}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x-\mathrm{i}} = \frac{x+\mathrm{i}}{x^2+1}$, où on a utilisé $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})t}}{-x+\mathrm{i}}\right| = \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1+x^2}} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Il suffit de prendre la partie imaginaire et réelle pour avoir : $\boxed{\forall x > 0,\ G(x) = \frac{1}{x^2+1} \text{ et } H(x) = \frac{x}{x^2+1}}$.

Soit $\alpha > 0$, dans $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\cos(\alpha t)\mathrm{d}t$ procédons au changement de variable $\alpha t = u$ qui est affine donc licite (bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[0,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$, ainsi $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\cos(\alpha t)\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u\frac{x}{\alpha}}\cos(u)\frac{1}{\alpha}\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales si elles convergent, or la seconde n'est rien d'autre que $\frac{1}{\alpha}H\left(\frac{x}{\alpha}\right)$. Or $\frac{1}{\alpha}H\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{x/\alpha}{x^2/\alpha^2+1} = \frac{x}{x^2+\alpha^2}$. On a donc montré que : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\cos(\alpha t)\mathrm{d}t = \frac{x}{x^2+\alpha^2}}$

Q6. D'après Q4 et Q5 on a, pour tout $x > 0$, que $F'(x) = -G(x) = \frac{-1}{x^2+1}$, ainsi il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F = -\arctan + C$, on prend la limite en $+\infty$ pour obtenir (d'après Q3) : $0 = -\frac{\pi}{2} + C$, ie $C = \frac{\pi}{2}$. On a donc $\boxed{F = \frac{\pi}{2} - \arctan}$, ainsi $\boxed{F(1) = \frac{\pi}{4}}$.

EXERCICE 3 : E3A PC 2020, exercice 5

Correction :

Q1. Tout d'abord $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bien une application de E dans $\mathbb{R}$, vérifions que c'est un produit scalaire.

— Par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bien symétrique.

— Pour $(P, Q, R) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\langle P + \lambda Q|R\rangle = (P(1) + \lambda Q(1))R(1) + (P'(1) + \lambda Q'(1))R'(1) + (P''(1) + \lambda Q''(1))R''(1) = P(1)R(1) + P'(1)R'(1) + P''(1)R''(1) + \lambda(Q(1)R(1) + Q'(1)R'(1) + Q''(1)R''(1)) = \langle P|Q\rangle + \lambda\langle Q|R\rangle$, ainsi $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bien linéaire en sa première variable et donc, par symétrie, est bilinéaire.

— Pour $P \in E$, $\langle P|P\rangle = P(1)^2 + P'(1)^2 + P''(1)^2 \geq 0$, ainsi $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bien positif.

— Soit $P \in E$ tel que $\langle P|P\rangle = 0$, ie $P(1)^2 + P'(1)^2 + P''(1)^2 = 0$, ainsi $P(1)^2 = P'(1)^2 = P''(1)^2 = 0$, ie $P(1) = P'(1) = P''(1) = 0$, donc 1 est racine de multiplicité au moins 3 de P, comme $\deg(P) \leq 2$, on a donc $P = 0$, ainsi $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est définie.

Ainsi $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique sur E, ie $\boxed{\langle\cdot|\cdot\rangle \text{ est un produit scalaire sur } E}$.

Q2. Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(1, X, X^2)$ de E.

— Posons $L_0 = \frac{1}{\|1\|}1 = 1$.

— Posons $\tilde{L_1} = X - \langle X|1\rangle 1 = X - 1$, comme $\|X - 1\| = \sqrt{0 + 1 + 0} = 1$, on pose $L_1 = X - 1$.

— Posons $\tilde{L_2} = X^2 - \langle X^2|X-1\rangle(X-1) - \langle X^1|1\rangle 1$. Comme $\langle x^2|X-1\rangle = 0+2+0 = 2$, $\langle X^2|1\rangle = 1+0+0 = 1$, on a donc $\tilde{L_2} = X^2 - 2(X - 1) - 1 = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$, comme $\langle (X - 1)^2|(X - 1)^2\rangle = 0 + 0 + 4$, on pose donc $L2 = \frac{1}{2}(X - 1)^2$.

Ainsi $\boxed{(1, X - 1, \tfrac{1}{2}(X - 1)^2) \text{ est une base orthonormée pour } \langle\cdot|\cdot\rangle}$.

Q3. Comme $(1, X - 1)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$, on en déduit que la projeté orthogonale de $P \in E$ sur $\mathbb{R}_1[X]$ est $p_1(P) = \langle P|1\rangle 1 + \langle P|X - 1\rangle(X - 1)$, ainsi $p_1(X^2 - 4) = -3 + 2(X - 1) = 2X - 5$. Or on sait que $d(X^2 - 4, \mathbb{R}_1[X]) = \|X^2 - 4 - p_1(X^2 - 4)\| = \|X^2 - 2X + 1\| = \|(X - 1)^2\| = \sqrt{0 + 0 + 4} = 2$. Ce qui montre que $\boxed{d(X^2 - 4, \mathbb{R}_1[X]) = 2}$.

Q4. **Q4.1** Soit φ l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie pour $P \in E$, par $\varphi(P) = P(1)$, φ est bien linéaire sur E (pour $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)(1) = P(1) + \lambda Q(1) = \varphi(P) + \lambda\varphi(Q)$) et comme $H = \operatorname{Ker}(\varphi)$ on a bien que $\boxed{H \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$. De plus $\varphi(1) = 1 \neq 0$, on a $\operatorname{rg}(\varphi) \geq 1$ et comme φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ on a $\operatorname{rg}(\varphi) \leq 1$, d'où $\operatorname{rg}(\varphi) = 1$, ainsi d'après le théorème du rang, $\boxed{H \text{ est de dimension } 2}$ (ie c'est un hyperplan de E).

Q4.2 La famille $(X - 1, \frac{1}{2}(X - 1)^2)$ est une famille orthonormale (donc libre puisque les éléments sont non nuls) de deux éléments de H qui est donc une base orthonormale de H, de plus comme 1 est orthogonal aux deux vecteurs de cette base de H on a donc $H^\perp = \operatorname{Vect}(1)$.

Notons p_H (resp $p_{H^\perp}$) la projection orthogonale sur H (resp. $H^\perp$), pour $P \in E$, on a $p_H(P) = P - p_{H^\perp}(P)$, or $p_{H^\perp}(P) = \langle P|1\rangle 1$. Comme $p_{H^\perp}(1) = 1$, on a $p_H(1) = 0$, comme $p_{H^\perp}(X) = 1$, on a $p_H(X) = X - 1$, comme $p_{H^\perp}(X^2) = 1$, on a $p_H(X^2) = X^2 - 1$.

Ainsi $\boxed{\operatorname{Mat}_{(1,X,X^2)}(p_H) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

EXERCICE 4 : CCINP PC 2022, exercice 1

Partie I – Généralités sur l'application φ

Correction :

Q1. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\varphi(P)$ est le reste de la division euclidienne de AP par B ainsi $\varphi(P)$ est un polynôme et $\deg(\varphi(P)) < \deg(B) = n+1$, ce qui montre bien $\deg(\varphi(P)) \leq n$ et donc que $\boxed{\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]}$.

Q2. On a : $A(P_1+\lambda P_2) = AP_1+\lambda P_2 = BQ_1+R_1+\lambda(BQ_2+R_2) = B(Q_1+\lambda Q_2)+(R_1+\lambda R_2)$. De plus $\deg(R_1+\lambda R_2) \leq \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) < \deg(B)$. Ainsi, par unicité dans le théorème de la division euclidienne, $Q_1+\lambda Q_2$ est le quotient de la division euclidienne de $A(P_1+\lambda P_2)$ et $R_1+\lambda R_2$ le reste, ainsi $\varphi(P_1+\lambda P_2) = R_1+\lambda R_2 = \varphi(P_1)+\lambda\varphi(P_2)$. Ce qui montre la linéarité de φ, comme on a montré à la question précédente que c'était une application de $\mathbb{C}_n[X]$ dans lui-même, on a bien montré que $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{C}_n[X]}$.

Partie II – Étude d'un premier exemple

Correction :

Q3. On a $A = X^2+2X = 0.B+X^2+2X$, ainsi $\varphi(1) = 2X+X^2$. On a $AX = X^3+2X^2 = 1.B+X^2+X+1$, ainsi $\varphi(X) = 1+X+X^2$. On a $AX^2 = (X+1)B+1+2X$, ainsi $\varphi(X^2) = 1+2X$. Ce qui montre bien que $\boxed{\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}(\varphi) = M}$.

Q4. Tout d'abord, $\chi_M(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ -2 & X-1 & -2 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -2 & X-1 & -(X+1) \\ -1 & -1 & X+1 \end{vmatrix}$ $(C_3 \leftarrow C_3 - C_2)$, ainsi $\chi_M(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -3 & X-2 & 0 \\ -1 & -1 & X+1 \end{vmatrix}$ $(L_2 \leftarrow L_2 + L_3)$. Ainsi $\chi_M(X) = (X+1)\begin{vmatrix} X & -1 \\ -3 & X-2 \end{vmatrix} = (X+1)\left(X(X-2)-3\right) = (X+1)(X^2-2X-3) = (X+1)^2(X-3)$. Ainsi $\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{-1, 3\}}$.

Notons, pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, $E_\lambda(M) = \mathrm{Ker}(M - \lambda I_3)$ l'espace propre de valeur propre λ de M.

On a $M + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, cette matrice est de rang un, donc d'après le théorème du rang son noyau est de dimension deux, on remarque que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs non colinéaires du noyau de $M + I_3$, ainsi $\boxed{E_1(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$. *Alternative* : On peut bien entendu déterminer le noyau en résolvant un système.

On a $M - 3I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, on a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3(M) \iff$

$$\begin{cases} -3x+y+z=0 \\ 2x-2y+2z=0 \\ x+y-3z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-3z=0 \\ 2x-2y+2z=0 \\ -3x+y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y-3z=0 \\ -4y+8z=0 \\ 4y-8z=0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x+y-3z=0 \\ y-2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+\quad -z=0 \\ y-2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=z \\ y=2z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$. Ainsi $\boxed{E_{-3}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$.

Alternative : On peut signaler que $\mathrm{Ker}(M - 3I_3)$ est de dimension 1 (car valeur propre simple) et remarquer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est dans ce noyau.

Q5. On a $\dim(E_1(M)) + \dim(E_{-3}(M) = 2+1 = 3$, ainsi M et donc $\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable}}$, de plus on a que $\boxed{\left(1-X, 1-X^2, 1+2X+X^2\right) \text{ est une base constituée de vecteurs propres de } \varphi}$.

Partie III – Étude d'un second exemple

Correction :

Q6. On a $A = \alpha+\beta X+\gamma X^2 = 0.B+\alpha+\beta X+\gamma X^2$, ainsi $\varphi(1) = \alpha+\beta X+\gamma X^2$. On a $AX = \alpha X+\beta X^2+\gamma X^3 = \gamma B + \alpha X + \beta X^2$, ainsi $\varphi(X) = \alpha X + \beta X^2$. On a $AX^2 = \alpha X^2 + \beta X^3 + \gamma X^4 = (\beta + \gamma X)B + \alpha X^2$, ainsi $\varphi(X^2) = \alpha X^2$. Ce qui montre bien que $\boxed{\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}(\varphi) = T}$.

Q7. Comme T est triangulaire, $\mathrm{Sp}(T) = \{\alpha\}$, on a : T diagonalisable $\iff \exists P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \,/\, T = P\alpha I_3 P^{-1} \iff T = \alpha I_3 \iff \beta = \gamma = 0$. Ainsi φ est diagonalisable si et seulement si A est constant.

Partie IV – Étude du cas où B est scindé à racines simples

Correction :

Q8. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a $D(x_k) = P(x_k) - \sum_{i=0}^{n} P(x_i)L_i(x_k)$, or pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a $L_i(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ 1 & \text{si } k = i \end{cases}$, ainsi $D(x_k) = P(x_k) - P(x_k) = 0$. On a bien montré que $\boxed{x_0, \ldots, x_n \text{ sont des racines du polynôme } D}$.

Q9. Le polynôme D est de degré inférieur ou égal à n (car combinaison linéaire de polynômes qui le sont), or D possède $n + 1$ racines distinctes d'après la question précédente, ainsi $D = 0$, ce qui montre bien que $\boxed{\forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)L_i}$.

Q10. D'après la question précédente, la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est génératrice de $\mathbb{C}_n[X]$, comme elle possède $n+1 = \dim(\mathbb{C}_n[X])$ éléments, on a bien que $\boxed{(L_0, \ldots, L_n) \text{ est une base de } \mathbb{C}_n[X]}$.
Alternative : On peut aussi montrer la liberté : Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\lambda_0 L_0 + \ldots + \lambda_n L_n = 0$, pour $k \in [\![0, n]\!]$, en évaluant l'égalité en x_k on obtient $\lambda_k = 0$, ceci étant vérifié pour tout k, la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est libre, et comme elle est de cardinal $n + 1 = \dim(\mathbb{C}_n[X])$, on a bien que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q11. Soit $(j, k) \in [\![0, n]\!]^2$. On a $AL_k = Q_k B + R_k$. On évalue cette égalité en x_j, ainsi $A(x_j)L_k(x_k) = Q_k(x_j)B(x_j) + R_k(x_j)$, or $B(x_j) = 0$ et $L_k(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ 1 & \text{si } k = i \end{cases}$, ce qui montre bien que $\boxed{R_k(x_j) = 0 \text{ si } j \neq k \text{ et que } R_k(x_k) = A(x_k)}$.

Q12. Soit $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\varphi(L_k) = R_k$, en appliquant Q9 à R_k on a $R_k = \sum_{i=0}^{n} R_k(x_i)L_i$, ainsi, d'après la question précédente $R_k = A(x_k)L_k$, ce qui montre bien que $\boxed{\varphi(L_k) = A(x_k)L_k}$.

Q13. On vient de montrer, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, que L_k (qui est non nul) est vecteur propre de φ de valeur propre L_k, ainsi $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de vecteurs propres de φ, ainsi $\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable}}$, et on a aussi que $\boxed{\text{les valeurs propres de } \varphi \text{ sont } A(x_0), \ldots, A(x_n)}$.

EXERCICE 5 : E3A PC 2020, exercice 4

Correction :

Q1. Q1.1 Montrons par récurrence double sur $k \in \mathbb{N}$ que $M^k \in F$.
Initialisation : par construction de F on a $M^0 = I_n$ et $M^1 = M$ dans F (et même M^2), ainsi la propriété est vrai au rang 0 et 1.
Hérédité : on suppose la propriété au rang k et $k - 1$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^\star$, ie on suppose $M^k \in F$ et $M^{k-1} \in F$.
On a $M^{k+1} = M^2 M^{k-1} = (\frac{3}{2}M - \frac{1}{2}I_n)M^{k-1} = \frac{3}{2}M^k - \frac{1}{2}M^{k-1} \in F$ (par hypothèse de récurrence et car F est un ev).

On a bien montré par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k \in F$.
Comme M^2 est combinaison linéaire de M et de I_n, on en déduit que $F = \text{Vect}(I_n, M)$. Montrons que (I_n, M) est une famille libre, procédons par l'absurde :
On suppose que M et I_n sont liés, comme $I_n \neq 0$, on aurait l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda I_n$. En injectant dans le relation vérifiée par M on en déduit que $2\lambda^2 I_n = 3\lambda I_n - I_n$, ainsi $(2\lambda^2 - 3\lambda + 1)I_n = 0$, donc $2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$, ce qui implique que $\lambda = 1$ ou $\lambda = \frac{1}{2}$, or ces deux possibilités sont exclus. Ainsi (I_n, M) est une famille libre, comme elle est génératrice de F, on a donc que $\boxed{(I_n, M) \text{ est une base de } F}$. En particulier $\boxed{\dim(F) = 2}$.
Remarque : On peut, dés le début, remarquer que M^2 est combinaison linéaire de M et de I_n et ainsi faire une récurrence simple.

Q1.2 Soit $(N, N') \in F^2$, il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2$ tels que $N = \alpha I_n + \beta M$ et $N' = \alpha' I_n + \beta' M$, on en déduit donc que $NN' = \alpha\alpha' I_n + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)M + \beta\beta' M^2 \in F$ (par définition initiale de F), ainsi $\boxed{F \text{ est stable par produit}}$.

Q1.3 Tout d'abord on remarque que A et B sont dans F, montrons maintenant que (A, B) est une famille libre. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha A + \beta B = 0$, ainsi $\alpha(M - I_n) + \beta(M - \frac{1}{2}I_n) = 0$, ie $(\alpha + \beta)M + (-\alpha - \frac{1}{2}\beta)I_n = 0$, comme la famille (M, I_n) est libre, on en déduit que $\alpha + \beta = 0$ et $-\alpha - \frac{1}{2}\beta = 0$, donc $\alpha = \beta = 0$. La famille (A, B) est donc une famille libre de F, comme elle est constituée de deux vecteurs et comme F est de dimension 2, on en déduit que $\boxed{(A, B) \text{ est une base de } F}$.
On a $AB = (M - I_n)(M - \frac{1}{2}I_n) = M^2 - \frac{3}{2}M + \frac{1}{2}I_n$, ainsi $\boxed{AB = 0}$ de même $\boxed{BA = 0}$.
On a $A^2 = M^2 - 2M + I_n = \frac{3}{2}M - \frac{1}{2}I_n - 2M + I_n = \frac{-1}{2}M + \frac{1}{2}I_n$, ainsi $\boxed{A^2 = \frac{-1}{2}A}$.
On a $B^2 = M^2 - M + \frac{1}{4}I_n = \frac{3}{2}M - \frac{1}{2}I_n - M + \frac{1}{4}I_n = \frac{1}{2}M - \frac{1}{4}I_n$, ainsi $\boxed{B^2 = \frac{1}{2}B}$.

Q1.4 Soit $T \in F$, il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $T = \alpha A + \beta B$. Ainsi $T^2 = \alpha^2 A^2 + \alpha\beta AB + \beta\alpha BA + \beta^2 B = \frac{1}{2}(-\alpha^2 A + \beta^2 B)$. Or $M = -A + 2B$, ainsi on a l'équivalence (la deuxième c'est car (A, B) base de F) :
$$T^2 = M \iff \frac{1}{2}(-\alpha^2 A + \beta^2 B) = -A + 2B \iff \begin{cases} -\alpha^2/2 & = -1 \\ \beta^2/2 & = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha^2 & = 2 \\ \beta^2 & = 4 \end{cases}.$$
Ainsi $\boxed{\text{l'équation } T^2 = M \text{ possède 4 solutions : } \sqrt{2}A + 2B,\ \sqrt{2}A - 2B, -\sqrt{2}A + 2B \text{ et } -\sqrt{2}A - 2B}$.

Q2. Q2.1 On remarque tout de suite que (p_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, en effet pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $2p_{n+2} = 3p_{n+1} - p_n$.
Son équation caractéristique $2r^2 - 3r + 1 = 0$ admet deux racines 1 et $\frac{1}{2}$. Ainsi il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $p_n = \frac{\alpha}{2^n} + \beta$.
Comme on sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_n = 1$ (X est une variable aléatoire), et comme on sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$, on en déduit que $\alpha = 2$ et $\beta = 0$.
On a donc montré : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2^{n+1}}}$.

Q2.2 Avec le rajout (série géométrique dérivée), on a tout de suite que $\sum n\mathbb{P}(X = n)$ converge absolument et $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{4}\frac{1}{(1 - 1/2)^2} = 1$. Ainsi $\boxed{X \text{ est d'espérance finie et } \mathbb{E}(X) = 1}$.
On en déduit aussi tout de suite que $\sum n(n-1)\mathbb{P}(X = n)$ converge absolument et $\mathbb{E}(X(X-1)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{8}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\frac{1}{2^{k-2}} = \frac{1}{8}\frac{2}{(1 - 1/2)^3} = 2$.
Ainsi X^2 est d'espérance finie et $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) = 3$. On en conclut ensuite que $\boxed{X \text{ possède une variance}}$, la formule de Koenig-Huygens donne $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 3 - 1$, ainsi $\boxed{\mathbb{V}(X) = 2}$.