Correction du Concours Blanc « Mines-Centrale » Pc-Psi

Problème 1 : Centrale-Supelec psi 2016

Partie I –Transformation de Fourier

Correction :

I.A La fonction φ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (discontinuité en $\pm\frac{1}{2}$ avec des limites à droite et à gauche). Ainsi φ est intégrable sur $[-1,1]$, comme φ est nulle sur $[1,+\infty[$ (resp. $]-\infty,-1]$) elle y est intégrable. On vient de montrer que : $\boxed{\varphi \in E_{cpm}}$.

Pour $x \in \mathbb{R}^\star$ on a directement : $\mathcal{F}(\varphi)(x) = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x t}}{2\mathrm{i}\pi x}\right]_{-1/2}^{1/2} = -\frac{1}{2\mathrm{i}\pi x}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x}) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$. De plus $\boxed{\mathcal{F}(\varphi)(0) = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{d}t = 1}$. *Remarque* $\mathcal{F}(\varphi)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

I.B

I.B.1 La fonction ψ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\star$. Elle est continue en 0 car $\psi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\pi x}{\pi x} = 1$, et, pour $x \neq 0$, $\psi'(x) = \dfrac{\pi^2 x\cos(\pi x) - \pi\sin(\pi x)}{\pi^2 x^2} = \dfrac{1}{\pi^2 x^2}\left(\pi^2 x(1 + \underset{x\to 0}{o}(x)) - \pi(\pi x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) = \underset{x\to 0}{o}(1) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$, ainsi ψ est dérivable en 0 et ψ' est continue sur en 0 (et $\psi'(0) = 0$), ainsi $\boxed{\psi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

Remarque : dans le sujet la question était : "Justifier que ψ est développable en série entière. Préciser ce développement ainsi que son rayon de convergence. En déduire que ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.".
Correction : On sait que sin est DSE de rayon infini, ainsi pour $x \neq 0$ on a : $\psi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(\pi x)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\pi^2)^n}{(2n+1)!}x^{2n}$. La formule est encore vérifiée pour $x = 0$. On a donc trouvé le DSE de ψ et montré que son rayon de convergence est infini. Comme la somme d'une série entière est de classe C^∞ sur son disque ouvert de convergence, on a que : $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$.

I.B.2 Soit $n \in \mathbb{N}$, pour $x \in [n, n+1]$, on a $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{n+1}$. On en déduit que $\displaystyle\int_n^{n+1} |\psi(x)|\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{\pi(n+1)}\int_n^{n+1} |\sin(\pi x)|\,\mathrm{d}x$. Comme $x \mapsto |\sin(\pi x)|$ est 1-périodique, $\displaystyle\int_n^{n+1} |\sin(\pi x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^1 |\sin(\pi x)|\,\mathrm{d}x = \left[\frac{-\cos(\pi x)}{\pi x}\right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$. On en déduit donc que $\boxed{\displaystyle\int_n^{n+1} |\psi(x)|\,\mathrm{d}x \geq \frac{2}{\pi^2(n+1)}}$. Ainsi pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on a : $\displaystyle\int_0^n |\psi(x)|\,\mathrm{d}x \geq \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (divergence de la série harmonique). Ceci montre que la fonction $M \mapsto \int_0^M |\psi(x)|$ qui est croissante diverge vers $+\infty$ en $+\infty$, ainsi ψ n'est pas intégrable et en particulier $\boxed{\psi \notin E_{cpm}}$.

I.C Soit $f \in E_{cpm}$, appliquons le théorème de continuité des intégrales à paramètres. On a :
— $\forall x \in \mathbb{R}$ fixé, $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x t}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
— $\forall t \in \mathbb{R}$ fixé, $x \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x t}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
— Soit $[-a,a] \subset \mathbb{R}$, pour $(x,t) \in [-a,a]\times\mathbb{R}$, $|f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi x t}| = |f(t)|$, la fonction de domination (qui est bien indépendante de x) est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le théorème s'applique donc et donne $\boxed{\mathcal{F}(f) \in C^0(\mathbb{R})}$.

I.D

I.D.1 Soit $n \in \mathbb{N}$. $x \mapsto x^n f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et les seuls problèmes d'intégrabilité sont aux voisinages des infinis. Comme $x \mapsto x^{n+3}f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ on a que $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2x^nf(x) = 0$ (comme produit d'une fonction qui tend vers 0, $x \mapsto \frac{1}{x}$ en l'occurrence, et d'une fonction bornée), ainsi $x^nf(x) = \underset{x\to+\infty}{o}(1/x^2)$, on a donc l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$, il en va de même en $-\infty$. On a bien montré que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ la fonction } x \mapsto x^n f(x) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$.

I.D.2 On va maintenant appliquer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres. On a :

— $\forall x \in \mathbb{R}$ fixé, $t \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

— $\forall t \in \mathbb{R}$ fixé, $x \mapsto f(t)e^{-2i\pi xt}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, pou $n \in \mathbb{N}^\star$ sa dérivée n-ième est $x \mapsto (-2i\pi)^n t^n f(t)e^{-2i\pi xt}$.

— $\forall x \in \mathbb{R}$ fixé, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $t \mapsto (-2i\pi)^n t^n f(t)e^{-2i\pi xt}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

— Soit $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, pour tout $(x, t) \in [-a, a] \times \mathbb{R}$ on a $|(-2i\pi)^n t^n f(t)e^{-2i\pi xt}| = (2\pi)^n|t^n f(t)|$. La fonction de domination (qui est bien indépendante de x) est intégrable sur $\mathbb{R}$ (cf I.D.1).

Le théorème s'applique et donne $\boxed{\mathcal{F}(f) \in C^\infty(\mathbb{R})}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a : $\boxed{(\mathcal{F}(f))^{(n)}(x) = (-2i\pi)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)e^{-2i\pi x}\,\mathrm{d}t}$.

I.E

I.E.1 La fonction θ est continue sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k\theta(x) = 0$ (par croissances comparés), ainsi (définition de la limite avec un $\varepsilon = 1$ par exemple) $x \mapsto x^k\theta(x)$ est bornée sur $[1, +\infty[$, comme elle est bornée sur $[0, 1]$ (fonction continue sur un segment) elle est donc bornée sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $\mathbb{R}$ (car est paire ou impaire en fonction de la parité de k). On viens donc de montrer que : $\boxed{\theta \in \mathcal{S}}$.
La question précédente donne la dérivabilité de $\mathcal{F}(\theta)$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathcal{F}(\theta)'(x) = (-2i\pi)\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-\pi t^2}e^{-2i\pi xt}\,\mathrm{d}t$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathcal{F}(\theta)'(x) + 2\pi x\mathcal{F}(\theta)(x) = i\int_{-\infty}^{+\infty}(-2\pi t - 2i\pi x)e^{-\pi t^2-2i\pi xt}\,\mathrm{d}t = \left[e^{-\pi t^2-2i\pi xt}\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0$. Ainsi : $\boxed{\mathcal{F}(\theta) \text{ est solution de}}$: $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ y'(x) + 2\pi xy(x) = 0}$.

I.E.2 On résout cette EDL$_1$: les solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ce^{-\pi x^2}$ où C est une constante. Ainsi il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\mathcal{F}(\theta)(x) = Ce^{-\pi x^2}$, or $\mathcal{F}(\theta)(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\theta(x)\,\mathrm{d}x = 1$, ainsi $C = 1$. D'où : $\boxed{\mathcal{F}(\theta) = \theta}$.
Remarque : $\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(x)\,\mathrm{d}x$ est l'intégrale de Gauss.

Partie II –Formule d'inversion de Fourier

Correction :

II.A Pour $n \in \mathbb{N}$ on introduit $u_n : x \mapsto \mathcal{F}(f)(x)\theta\left(\frac{x}{n}\right)$ et on va utiliser le théorème de convergence dominée. On a :

— La fonction θ étant continue en 0 (et $\theta(0) = 1$), (u_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\mathcal{F}(f)$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est continue sur $\mathbb{R}$, il en va de même pour la limite simple de (u_n).

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|u_n(x)| \leq |\mathcal{F}(f)(x)|$ (car $|\theta|$ est majorée par 1),la fonction de domination est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Le TCD s'applique et donne que : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(f)(x)\,\mathrm{d}x}$.

II.B On va encore appliquer le TCD, pour $n \in \mathbb{N}$ on introduit (on a montré en I.E.2 que : $\mathcal{F}(\theta) = \theta$) : $v_n : t \mapsto \theta(t)f\left(\frac{t}{n}\right)$.

— Comme f est continue en 0, (v_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $f(0)\theta$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est continue sur $\mathbb{R}$, il en va de même pour la limite simple de (v_n).

— Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, comme $f \in \mathcal{S}$ et donc f est bornée sur $\mathbb{R}$, on a :$|v_n(x)| \leq \|f\|_\infty\theta(x)$, la fonction de domination est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Ainsi le TCD s'applique et donne : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = f(0)\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(t)\,\mathrm{d}t = f(0)}$.

II.C En utilisant la définition de $\mathcal{F}(f)$, on a :$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi xt}\theta\left(\frac{x}{n}\right)\,\mathrm{d}t\right)\,\mathrm{d}x$. La formule de Fubini donne alors : $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi xt}\theta\left(\frac{x}{n}\right)\,\mathrm{d}x\right)\,\mathrm{d}t$. Dans l'intégrale interne on procède au changement de variable $u = x/n$ (linéaire donc licite) et on trouve que $I_n = n\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2in\pi ut}\theta(u)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t$. Dans l'autre intégrale on procède au changement de variable $v = nt$ (linéaire donc licite) et on trouve : $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi ut}\theta(u)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t$. Ainsi $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi ut}\theta(u)\,\mathrm{d}u\right)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right)\mathcal{F}(\theta)(t)\,\mathrm{d}t = J_n$, on a bien montré : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^\star,\ I_n = J_n}$.

II.D En faisant tendre n vers $+\infty$ dans II.C et en utilisant les limites calculées en II.A et II.B on a : $\boxed{f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(f)(x)\,\mathrm{d}x}$.

Fixons $x\in\mathbb{R}$ et utilisons la fonction $h : t\mapsto f(x+t)$. Cette fonction h est continue sur $\mathbb{R}$, vérifions qu'elle est dans $\mathcal{S}$, soit $k\in\mathbb{N}$, pour $t\in\mathbb{R}$ tel que $|t| > |x|+1$ (pour pouvoir diviser par $(x+t)$), $t^k h(t) = t^k f(x+t) = \underbrace{\frac{t^k}{(x+t)^k}}_{\underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow}1}\underbrace{(x+t)^k f(x+t)}_{\text{borné car } f\in\mathcal{S}}$. Ce qui montre que h est bornée au voisinage de $\pm\infty$ donc sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle y est continue.

En appliquant ce qu'on a fait en début de question à h on a : $f(x) = h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}(h)(y)\,\mathrm{d}y$. Il ne reste plus qu'a effectuer le changement de variable $u = x+t$ (affine donc licite) pour obtenir : $\mathcal{F}(h)(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi ty}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi yx}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi uy}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi yx}\mathcal{F}(f)(y)$. On a donc montré que : $\boxed{f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi yx}\mathcal{F}(f)(y)\,\mathrm{d}y}$.

II.E La fonction $x\mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$ est dans $\mathcal{S}$ (elle est continue sur $\mathbb{R}$ et dominée au voisinage de $\pm\infty$ par toute puissance de x par croissances comparées). De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $\mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-|t|-2\pi itx}\,\mathrm{d}t$. On a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f)(x) &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{t(1-2\pi ix)}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0 ++\infty \mathrm{e}^{t(-1-2\pi ix)}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{1-2\pi ix}\mathrm{e}^{t(1-2\pi ix)}\right]_{t=-\infty}^{t=0} - \left[\frac{1}{1+2\pi ix}\mathrm{e}^{t(-1-2\pi ix)}\right]_{t=0}^{t=+\infty}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2\pi ix}+\frac{1}{1+2\pi ix}\right)\\
&= \frac{1}{1+4\pi^2x^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la question précédente, on a montré, pour tout $x\in\mathbb{R}$, que : $\boxed{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi yx}}{1+(2\pi y)^2}\,\mathrm{d}y}$.

Partie VI –Transformation de Laplace

Correction :

VI.A

VI.A.0 Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda)$ et $Y\hookrightarrow\mathcal{P}(\mu)$, montrons que $X+Y\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda+\mu)$. On a $(X+Y)(\Omega)\subset\mathbb{N}$. Pour $k\in\mathbb{N}$, en utilisant la formule des probabilités totales avec le SCE $(X=i)_{i\in\mathbb{N}}$ on a : $\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}\left((X=i)\cap(Y=k-i)\right)$, par indépendance de X et

Y on a : $\mathbb{P}(X+Y=k)=\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=k-i)=\sum_{i=0}^{k}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda}{i!}\mathrm{e}^{-\mu}\frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}=\frac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda^i\mu^{k-i}=$ $\dfrac{\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu}}{k!}(\lambda+\mu)^k$. Ce qui montre bien que $\boxed{X+Y\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda+\mu)}$.

VI.A.1 Montrons par récurrence sur n que $S_n\hookrightarrow\mathcal{P}(n\lambda)$:

Initialisation : Immédiat pour $n=1$ (le résultat préliminaire montre aussi directement pour $n=2$.

Hérédité : Supposons le résultat vrai au rang $n\geq 1$, comme S_n et X_{n+1} sont indépendantes et suivent une loi de Poisson, on peut appliquer le résultat préliminaire pour montrer que $S_{n+1}=S_n+X_{n+1}$ suit une loi de Poisson de paramètre $n\lambda+\lambda=(n+1)\lambda$. Ce qui termine l'hérédité.

Ainsi par principe de récurrence : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^\star,\ S_n\hookrightarrow\mathcal{P}(n\lambda)}$.

VI.A.2 D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, en notant μ et σ l'espérance et l'écart-type de ces variables, on a : $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{S_n}{n}-\mu\right|\geq\varepsilon\right)\leq\dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$. En utilisant $\mu=\sigma^2=\lambda$ on a $\mathbb{P}\left(|S_n-\lambda|\geq n\varepsilon\right)\leq\dfrac{\lambda}{n\varepsilon^2}$ et donc : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^\star,\ \mathbb{P}(|S_n-n\lambda|\geq n\varepsilon)\leq\dfrac{\lambda}{n\varepsilon^2}}$.

VI.A.3 Si $a>b+c$ et $c\geq 0$ alors $|a-b|\geq a-b>c$. On en déduit que : $\boxed{(S_n>n(\lambda+\varepsilon))\subset(|S_n-n\lambda|\geq n\varepsilon)}$. De même si $a\leq b-c$ avec $c\geq 0$ alors $a-b\leq -c\leq 0$ et donc $|a-b|\geq c\geq 0$. Ainsi $\boxed{(S_n\leq n(\lambda-\varepsilon))\subset(|S_n-n\lambda|\geq n\varepsilon)}$.

VI.A.4 Séparons en deux cas :

Cas 1 : $x\in[0,\lambda[$. Posons $\varepsilon=\frac{\lambda-x}{2}$. On a $\varepsilon>0$ et $x<\lambda-\varepsilon$. On en déduit que $(S_n\leq nx)\subset(S_n\leq n(\lambda-\varepsilon))$ et donc : $0\leq\mathbb{P}(S_n\leq nx)\leq\mathbb{P}(S_n\leq n(\lambda-\varepsilon))\leq\mathbb{P}(|S_n-n\lambda|\geq n\varepsilon)\leq\dfrac{\lambda}{n\varepsilon^2}$. Ainsi (par théorème d'encadrement) : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(S_n\leq nx)=0$

Cas 2 : $x>\lambda$. Posons $\varepsilon=\frac{x-\lambda}{2}$. On a $\varepsilon>0$ et $\lambda+\varepsilon<x$. On en déduit que $(S_n>nx)\subset(S_n>n(\lambda-\varepsilon))$ et donc : $0\leq\mathbb{P}(S_n>nx)\leq\mathbb{P}(S_n>n(\lambda-\varepsilon))\leq\mathbb{P}(|S_n-n\lambda|\geq n\varepsilon)\leq\dfrac{\lambda}{n\varepsilon^2}$. Ainsi (par théorème d'encadrement) : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(S_n>nx)=0$ et donc $\mathbb{P}(S_n\leq nx)=1-\mathbb{P}(S_n>nx)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$.

On a bien montré : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(S_n\leq nx)=\begin{cases}0 & \text{si } 0\leq x<\lambda\\ 1 & \text{si } x>\lambda\end{cases}}$.

VI.B S_n étant à valeurs entières positives et suivant une loi de Poisson de paramètre $n\lambda$, $\mathbb{P}(S_n\leq nx)=\displaystyle\sum_{0\leq k\leq\lfloor nx\rfloor}\mathbb{P}(S_n=k)=\sum_{0\leq k\leq\lfloor nx\rfloor}\frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda}$. La question précédente donne : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{0\leq k\leq\lfloor nx\rfloor}\frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda}=\begin{cases}0 & \text{si } 0\leq x<\lambda\\ 1 & \text{si } x>\lambda\end{cases}}$.

VI.C

VI.C.1 Avec la formule donné pour $(\mathcal{L}(f))^{(k)}$ dans le préambule de la partie VI, on a : $\displaystyle\sum_{0\leq k\leq\lfloor nx\rfloor}(-1)^k\frac{n^k}{k!}(\mathcal{L}(f))^{(k)}(n)=\sum_{0\leq k\leq\lfloor nx\rfloor}\int_0^{+\infty}\frac{(nt)^k}{k!}f(t)e^{-nt}\,\mathrm{d}t=$ $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\sum_{0\leq k\leq\lfloor nx\rfloor}\frac{(nt)^k}{k!}f(t)e^{-nt}\right)\mathrm{d}t$. Posons $F_n : t\mapsto\displaystyle\sum_{0\leq k\leq\lfloor nx\rfloor}\frac{(nt)^k}{k!}f(t)e^{-nt}$, la question précédente (et le résultat admis) disent que (F_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction F définie par $F(t)=f(t)$ pour $t\in[0,x[$, $F(t)=f(x)/2$ pour $t=x$ et $F(t)=0$ pour $t\in]x,+\infty[$. Appliquons le théorème de convergence dominée :

— (F_n) converge simplement vers F sur $\mathbb{R}_+$.

— Tous les F_n et F sont continues par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

— Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $t\in\mathbb{R}_+$ on a (croissance de la suite des sommes partielles d'une SATP pour l'inégalité) : $|F_n(t)|\leq|f(t)|\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(nt)^k}{k!}e^{-nt}=|f(t)|$, la fonction de domination est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (f est nulle et continue en dehors d'un segment donc l'intégrale n'est pas généralisée).

Ainsi le TCD s'applique et on a : $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{0\leq k\leq\lfloor nx\rfloor}(-1)^k\frac{n^k}{k!}(\mathcal{L}(f))^{(k)}(n)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}$.

VI.C.2 $\mathcal{L}$ est linéaire et il suffit de montrer que son noyau est réduit à $\{0\}$. Soit donc f une fonction continue nulle hors d'un segment et telle que $\mathcal{L}(f) = 0$. La question précédente montre que pour tout x, $\int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y = 0$. Ainsi une primitive de f est nulle sur $\mathbb{R}$, on en déduit donc que f est nulle sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\boxed{\mathcal{L} \text{ est injective sur l'ensemble des fonctions considérées}}$.

Problème 2 : Mines-Pont PSI 2022, maths 2 (sans la partie IV)

Partie I – Matrices semi-simples

Correction :

Q1. On a $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ 1 & X-3 \end{vmatrix} = (X-1)(X-3)+1 = X^2-4X+4 = (X-2)^2$. Si A était diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, il existerait $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que $A = P2I_2P^{-1} = 2I_2$, ce qui n'est pas le cas, donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Ainsi $\boxed{A \text{ n'est pas semi-simple}}$.

Q2. On a $\chi_B(X) = \begin{vmatrix} X-3 & -2 \\ 5 & X-1 \end{vmatrix} = (X-3)(X-1)+10 = X^2-4X+13 = (X-2)^2+9 = (X-2-3\mathrm{i})(X-2+3\mathrm{i})$. Ainsi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \{2+3\mathrm{i}, 2-3\mathrm{i}\}$, comme χ_B est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}[X]$, on en déduit que B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, ainsi $\boxed{B \text{ est semi-simple}}$.
On a $B-(2+3\mathrm{i})I_2 = \begin{pmatrix} 1-3\mathrm{i} & 2 \\ -5 & -1-3\mathrm{i} \end{pmatrix}$. On remarque que $2C_1 - (1-3\mathrm{i})C_2 = 0$, ainsi $V = (2, -1+3\mathrm{i})$ est un vecteur propre de B de valeur propre $2+3\mathrm{i}$. Posons $W_1 = (2,-1)$ et $W_2 = (0,3)$, ainsi (W_1, W_2) est une base de $\mathbb{R}^2$. De plus $BW_1 = (4,-11) = 2W_1 - 3W_2$ et $BW_2 = (6,3) = 3W_1 + 2W_2$. Ainsi, si on note $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, on a : $\boxed{B = Q\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}Q^{-1} \text{ (ie } a=1 \text{ et } b=3)}$.

Q3. La matrice M est diagonalisable (car deux valeurs propres distinctes puisque $b \neq 0$), donc $\boxed{M \text{ est semi-simple}}$. Ainsi il existe $V \neq 0$ vecteur propre de M de valeur propre μ, ainsi $MV = \mu V$, en conjuguant l'égalité et en utilisant $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on en déduit que $M\overline{V} = \overline{\mu}\overline{V}$, ainsi $\overline{V}$ est un vecteur propre de M de valeur propre $\overline{\mu}$. Notons $W_1 = \mathrm{Re}(V)$ et $W_2 = \mathrm{Im}(V)$, en prenant la partie réelle et la partie imaginaire dans l'égalité $MV = \mu V$ (ie dans $M(W_1 + \mathrm{i}W_2) = (a+\mathrm{i}b)(W_1+\mathrm{i}W_2)$), on trouve $MW_1 = aW_1 - bW_2$ et $MW_2 = bW_1 + aW_2$. Comme $V = W_1 + \mathrm{i}W_2$ et $\overline{V} = W_1 - \mathrm{i}W_2$, on a $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(W_1, W_2) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(V, \overline{V})$, ainsi (W_1, W_2) est une base de $\mathbb{C}^2$, donc une famille libre, comme ces vecteurs sont réels, ils forment donc une base de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, si on note Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vers la base (W_1, W_2), on a : $M = Q\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}Q^{-1}$, et donc $\boxed{M \text{ est semblable, dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \text{ à } \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}}$.

Q4. On a, par définition, que : i) $\Rightarrow$ M semi-simple. On vient de montrer à la question précédente que : ii) $\Rightarrow$ M semi-simple.
Réciproquement, supposons que $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est semi-simple, notons Δ le discriminant de χ_M, et séparons en trois cas :
Cas 1 : si $\Delta > 0$ alors χ_M est scindé-simple dans $\mathbb{R}[X]$ et donc M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et ainsi i) est vérifié
Cas 2 : si $\Delta < 0$ alors χ_M est scindé simple dans $\mathbb{C}[X]$ et ses racines sont deux complexes conjugués $a \pm \mathrm{i}b$ avec $b \neq 0$, ainsi ii) est vérifié
Cas 3 : si $\Delta = 0$ alors χM possède une unique racine $a \in \mathbb{R}$, comme M est semi-simple alors il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $M = PaI_2P^{-1} = aI_2$, ainsi M est diagonale donc i) est vérifié.
$\boxed{\text{L'équivalence est ainsi démontrée}}$.

Q5. Notons M une matrice presque diagonale semblable à N, et reprenons les notations de la définition : $M = \mathrm{diag}(D, M(a_1,b_1), \ldots, M(a_q,b_q))$ (D matrice diagonale de taille p, $(a_1, \ldots, a_q) \in \mathbb{R}^n$, et $(b_1, \ldots, b_n) \in (\mathbb{R}^\star)^n$).
Pour $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\star$, $\chi_{M(a,b)} = \begin{pmatrix} X-a & -b \\ b & X-a \end{pmatrix} = (X-a)^2 + b^2$, ainsi $\chi_{M(a,b)}$ possède deux racines complexes conjuguées de partie imaginaire non nul, ainsi d'après Q3, $M(a,b)$ est semi-simple.

Pour $i \in [\![1, q]\!]$, comme $M(a_i, b_i)$ est semi-simple il existe $P_i \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et $D_i \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ diagonale telles que $M(a_i, b_i) = P_i D_i P_i^{-1}$.
Posons la matrice par bloc $P = \mathrm{diag}(I_p, P_1, \ldots, P_q)$, cette matrice est inversible et $P^{-1} = \mathrm{diag}(I_p, P_1^{-1}, \ldots, P_q^{-1})$, de plus on a $M = P\mathrm{diag}(D, D_1, \ldots, D_p)P^{-1}$, ainsi M est semblable (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) à une matrice diagonale, donc N aussi. Ainsi $\boxed{N \text{ est semi-simple}}$.

Q6. Le polynômes χ_N est unitaire de degré n, notons $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ ses racines réelles (éventuellement il n'y en a aucune), comme χ_N est à coefficients réels, si μ est racine alors $\overline{\mu}$ l'est aussi, en notant $(\mu_1, \ldots, \mu_q)$ les racines complexes de χ_N de partie imaginaire positive, on alors $(\overline{\mu_1}, \ldots, \overline{\mu_q})$ sont aussi racines. Ainsi $\chi_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(X - \lambda_k) \prod_{k=1}^{q}(X - \mu_k)(X - \overline{\mu_k})$. On a $n = p + 2q$, notons alors, pour $k \in [\![1, q]\!]$, $\mu_k = a_k + \mathrm{i}b_k$ où $a_k \in \mathbb{R}$ et $b_k \in \mathbb{R}^\star$ (car μ_k racine complexe non réelle).
On suppose N semi-simple, ainsi il existe une base $(U_1, \ldots, U_p, V_1, \overline{V_1}, \ldots, V_q, \overline{V_q})$ de $\mathbb{C}^n$ où les U_k sont des vecteurs propres (qu'on choisit à coefficient réels) de valeurs propre λ_k et où les V_k sont des vecteurs propres de valeurs propres μ_k.
Posons alors, pour tout k, $W_{1,k} = \mathrm{Re}(V_k)$ et $W_{2,k} = \mathrm{Im}(V_k)$, ainsi $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(V_k, \overline{V_k}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(W_{1,k}, W_{2,k})$ (cf Q3). Ainsi $(U_1, \ldots, U_p, W_{1,1}, W_{2,1}, \ldots, W_{1,q}, W_{2,q})$ est une base de $\mathbb{C}^n$, donc est libre et comme les vecteurs qui la constitue sont a coefficients dans $\mathbb{R}$, c'est aussi une base de $\mathbb{R}^n$.
Notons $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(U_1, \ldots, U_p)$ et pour tout k, $G_k = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(W_{1,k}, W_{2,k})$, ainsi $\mathbb{R}^n = F \oplus \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{q} G_k$. Le sous-espace vectoriel F est stable par N (car engendré par des vecteurs propres), et il en va de même pour tous les G_k en effet :
Si $X \in G_k$ il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $X = \alpha W_{1,k} + \beta W_{2,k} = \frac{\alpha}{2}(V_k + \overline{V_k}) + \frac{\beta}{2\mathrm{i}}(V_k - \overline{V_k})$, ainsi $NX = \frac{\alpha}{2}(\mu_k V_k + \overline{\mu_k}\overline{V_k}) + \frac{\beta}{2\mathrm{i}}(\mu_k V_k - \overline{\mu_k}\overline{V_k})$, or $\frac{1}{2}(\mu_k V_k + \overline{\mu_k}\overline{V_k}) = \mathrm{Re}(\mu_k V_k) = a_k W_{1,k} - b_k W_{2,k}$ et $\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mu_k V_k - \overline{\mu_k}\overline{V_k}) = \mathrm{Im}(\mu_k V_k) = a_k W_{2,k} + b_k W_{1,k}$, ce qui montre bien que $NX \in G_k$.
Le calcul précédent (qui est le même qu'en Q3) donne aussi $NW_{1,k} = a_k W_{1,k} - b_k W_{2,k}$ et $NW_{2,k} = b_k W_{1,k} + a_k W_{2,k}$.
Il ne reste plus qu'à poser P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ vers la base $(U_1, \ldots, U_p, W_{1,1}, W_{2,1}, \ldots, W_{1,q}, W_{2,q})$, et le calcul précédent donne $N = P\mathrm{diag}(D, M(a_1, b_1), \ldots, M(a_q, b_q))P^{-1}$. Ce qui montre bien que $\boxed{\text{si } N \text{ est semi-simple alors } N \text{ est semblable dans } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ à une matrice presque diagonale}}$.

Partie II – Une caractérisation des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Correction :

Q7. Si tous les v_k étaient dans F on aurait $F = E$ puisque $(v_1, \ldots, v_n)$ est une base de E, $\boxed{\text{il existe donc } k \in [\![1, n]\!] \text{ tel que } v_k \notin F}$. De plus, soit $x \in F \cap \mathrm{Vect}(v_k)$, alors $x \in F$ et il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $x = \alpha v_k$ alors $\alpha = 0$ (sinon $v_k = \dfrac{1}{\alpha}x \in F$: absurde), donc $x = 0$ ce qui montre que $F \cap \mathrm{Vect}(v_k) = \{0_E\}$ et donc que $\boxed{F \text{ et } \mathrm{Vect}(v_k) \text{ sont en somme directe}}$.

Q8. Le sous-espace $\mathrm{Vect}(v_k)$ est stable par u (car engendré par un vecteur propre) et son intersection avec F est $\{0_E\}$, ainsi $\mathrm{Vect}(v_k)$ est dans $\mathcal{A}$, ainsi $1 = \dim(\mathrm{Vect}(v_k)) \in \mathcal{L}$, ainsi $\mathcal{L}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^\star$ et elle est majorée par n (car tous les sous-espaces vectoriels de E sont de dimension plus petite que n), ainsi $\boxed{\mathcal{L} \text{ possède un plus grand élément noté } r}$.

Q9. Comme $r \in \mathcal{L}$, il existe $G \in \mathcal{A}$ tel que $\dim(G) = r$, par définition de $\mathcal{A}$ on a G et F en somme directe, supposons qu'il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $v_k \notin F$ et $v_k \notin G$, ainsi $\mathrm{Vect}(v_k)$ et G sont en somme directe, notons $G' = G \oplus \mathrm{Vect}(v_k)$, on a G' stable par u (comme somme directe de sev qui le sont), de plus $G' \cap F = \{0_F\}$, ainsi G' est un élément de $\mathcal{A}$ de dimension $r + 1$, ce qui contredit la maximalité de r.
Ainsi tous les v_k sont dans F ou dans G, ce qui montre que $F + G = E$, ce qui montre bien que $\boxed{F \text{ admet un supplémentaire } G \text{ dans } E, \text{ stable par } u}$.
Remarque : on peut aussi poser $H = F + G$ et si $E \neq H$, utiliser Q7.

Q10. Notons $H = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$, par hypothèse H possède un supplémentaire G dans E stable par u, supposons que u n'est pas diagonalisable, ainsi $H \neq E$ et donc $\dim(H) \leq n - 1$, ce qui montre que $G \neq \{0_E\}$. Comme G est stable par u, on peut considérer l'endomorphisme u_G, induit par u sur G, son polynôme caractéristique

est de degré $\dim(G) \geq 1$, donc possède des racines, il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ valeur propre de u_G, il existe donc $x \in G$ tel que $x \neq 0$ et $u_G(x) = \lambda x$, ainsi $u(x) = \lambda x$ et donc $x \in H$, or $H \cap G = \{0_E\}$, ainsi $x = 0$, ce qui est absurde. Ainsi $\boxed{u \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$.
On a ainsi démontré (en Q9 et Q10) la caractérisation suivante :
$\boxed{u \text{ est diagonalisable si et seulement si tous les sev de } E \text{ possèdent des supplémentaires stables par } u}$.

Partie III – Polynômes de Hurwitz

Correction :

Q11. Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ un polynôme à coefficients strictement positifs et α une racine de P. Si on avait $\alpha \geq 0$, on aurait $P(\alpha) = \sum_{k=0}^{d} a_k \alpha^k \geq a_0 > 0$ (puisque $\alpha \geq 0$ et tous les a_k sont strictement positifs), ce qui contredit $P(\alpha) = 0$, ainsi $\boxed{\alpha < 0}$.

Q12. Soit P un polynôme de Hurwitz, et soit R un diviseur de P, il existe donc Q tel que $P = QR$. Soit α une racine de R, alors α est aussi racine de P et donc, puisque P est un polynôme de Hurwitz, on a $\alpha \in \mathrm{Re}^-$. Ce qui montre bien $\boxed{\text{qu'un diviseur d'un polynôme de Hurwitz est un polynôme de Hurwitz}}$.

Q13. Un polynôme irréductible de $\mathbb{R}[X]$ est soit de degré 1, soit de degré 2 (sans racine réelle), traitons les deux cas.
Cas 1 : Soit $P = aX + b$ un polynôme de Hurwitz de degré 1 avec $a \geq 0$, ainsi $a > 0$ et $\frac{-b}{a}$ est racine de P, ainsi $\frac{-b}{a} < 0$ et donc $b > 0$, ce qui montre bien que $\boxed{\text{tous les coefficients de } P \text{ sont strictement positifs}}$.
Cas 2 : Soit $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme de Hurwitz de degré 2 avec $a \geq 0$ et $b^2 - 4ac < 0$, on a donc $a > 0$. Les racines de P sont $\frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$, comme P est un polynôme de Hurwitz on a donc $\frac{-b}{2a} < 0$ et ainsi $b > 0$. Or $b^2 - 4ac < 0$ ainsi $c > \frac{b^2}{4a}$ (puisque $a > 0$) et donc $c > 0$, ce qui montre bien que $\boxed{\text{tous les coefficients de } P \text{ sont strictement positifs}}$.
Alternative : on peut aussi utiliser les relations coefficients/racines.
On a bien montré le résultat dans tous les cas.

Q14. On suppose $P = (X - z_1)(X - z_2) \in \mathbb{R}[X]$ et que les coefficients de $Q = (X - 2z_1)(X - 2z_2)(X - z_1 - z_2)^2$ sont strictement positifs, en particulier son coefficient constant (produit des racines) : $4z_1z_2(z_1 + z_2)^2 > 0$ et son coefficient devant X^3 (opposé de la somme des racines) : $-4(z_1 + z_2) > 0$. Comme P est à coefficients réels, on a deux possibilités :
Cas 1 : z_1 et z_2 sont réels, la stricte positivité des coefficients de Q donne $z_1z_2 > 0$ et $z_1 + z_2 < 0$, ainsi les deux racines de P sont de même signe et strictement négatives, ainsi P est un polynôme de Hurwitz.
Cas 2 : z_1 et z_2 sont complexes (non réelle) et conjuguées, ainsi $z_2 = \overline{z_1}$. Comme $-4(z_1 + z_2) > 0$ on a $-8\mathrm{Re}(z_1) > 0$, ainsi $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2) < 0$ et donc P est un polynôme de Hurwitz.
Dans tous les cas $\boxed{P \text{ est un polynôme de Hurwitz}}$.

Q15. Notons $A = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ où, pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $a_k > 0$ et $P = \sum_{k=0}^{d'} b_l X^l$ où, pour tout $l \in [\![0, d]\!]$, $b_l > 0$.
On a $AB = \sum_{k=0}^{d+d'} c_k X^k$ où, pour tout $k \in [\![0, d + d']\!]$, on a $c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$ (où on a posé $a_l = 0$ si $l > d$ et $b_l = 0$ si $l > d'$), on a clairement $c_k \geq 0$, de plus si $k \in [\![0, d]\!]$ alors $a_k b_o > 0$ apparait dans la somme donc $c_k > 0$, et si $k \in [\![d, d + d']\!]$ alors $a_d b_{k-d} > 0$ (puisque $k - d \in [\![0, d']\!]$) apparait dans cette somme et donc $c_k > 0$.
Ainsi $\boxed{\text{les coefficients du produit } AB \text{ sont également strictement positifs}}$.

Q16. On suppose $P(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - z_k)$ et $Q(X) = \prod_{(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2} (X - z_k - z_\ell)$ à coefficients réels. Notons $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ ses racines réelles (éventuellement il n'y en a aucune), notons $(\mu_1, \ldots, \mu_q)$ les racines complexes de P de partie imaginaire positive, on alors $(\overline{\mu_1}, \ldots, \overline{\mu_q})$ sont aussi racines. Ainsi $P(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k) \prod_{k=1}^{q} (X - \mu_k)(X - \overline{\mu_k})$ et on a $n = p + 2q$.
On peut remarquer que, pour tout $k \in [\![1, q]\!]$, on a $\mu_k + \overline{\mu_k} = 2\mathrm{Re}(\mu_k)$ est racine de Q.

— Sens réciproque : Supposons P et Q à coefficients strictement positifs. Ainsi (d'après Q11) les racines réelles de P et de Q sont strictement négatives, ce qui donne pour P que les λ_i sont strictement négatifs, et pour Q que les $2\mathrm{Re}(\mu_k)$ sont strictement négatifs. Ce qui montre bien que toutes les racines de P sont dans Re^-, ainsi $\boxed{P \text{ est un polynôme de Hurwitz}}$.

— Sens direct : Supposons que P est un polynôme de Hurwitz. Ainsi pour tout i, on a $\lambda_i < 0$ et pour tout k, on a $\mathrm{Re}(\mu_k) < 0$, en particulier $\mu_k + \overline{\mu_k} < 0$. Les polynômes $X - \lambda_i$ sont donc à coefficient strictement positifs, et il en va de même pour les $(X - \mu_k)(X - \overline{\mu_k}) = X^2 - (\mu_k + \overline{\mu_k})X + \mu_k\overline{\mu_k}$ (car $\mu_k\overline{\mu_k} = |\mu_k|^2 > 0$). Ainsi, en utilisant Q15, on en déduit que P est à coefficients strictement positifs.
On procède de même avec Q (ses racines, ie les $z_k - z_l$, sont aussi dans Re^-). Ainsi $\boxed{P \text{ et } Q \text{ sont à coefficients strictement positifs}}$.

Ainsi, $\boxed{\text{on a bien montré l'équivalence demandée}}$.