DS 8 : samedi 23 mars

Correction

Exercice 1 *(proche du cours et/ou des TDs).*

Correction :

1° Pour $x \neq 0$, posons $u_n = \frac{x^{2n}}{\binom{2n}{n}} = \frac{x^{2n}(n!)^2}{(2n)!} \neq 0$, on a $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|^{n+1}((n+1)!)^2(2n)!}{|x|^n(n!)^2(2n+2)!} = \frac{|x^2|(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{|x|^2}{4}$, d'après la règle de d'Alembert, si $x < 2$ la série $\sum u_n$ converge absolument donc $R \geq 2$, et si $x > 2$ la série $\sum u_n$ diverge grossièrement, donc $R \leq 2$, ainsi $R = 2$.

2° Pour $x \neq 0$, $\left|\frac{(n+1)3^{n+1}x^{n+1}}{nx^n}\right| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3|x|$, ainsi si $3|x| < 1$ la série converge (d'après la règle de d'Alembert), ainsi $R \geq \frac{1}{3}$, mais si $3|x| > 1$ la série diverge grossièrement et donc $R \leq \frac{1}{3}$. Ainsi $R = \frac{1}{3}$.

Pour $x \in \left]\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right[$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k(3x)^k = 3x\sum_{k=1}^{+\infty} k(3x)^{k-1} = \frac{3x}{(1-3x)^2}$ en utilisant $\sum nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$ (série géométrique dérivée).

3° (a) Soit R le rayon de convergence de cette SE, pour $x \in]-R, R[$ on a : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $xf'(x) = x\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} na_n x^n$ et $f''(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$.

On a f solution de l'ED si et seulement si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n\right)x^n = 1$ si et seulement si $2a_2 + a_0 = 1$ ie $a_2 = \dfrac{1-a_0}{2}$ et, pour tout $n \geq 1$, $(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0$, ie $a_{n+2} = \dfrac{-1}{n+2}a_n$.

(b) Comme on veut $f(0) = f'(0) = 0$ on a $a_0 = a_1 = 0$, on en déduit par récurrence directe que $a_{2p+1} = 0$, on en déduit aussi que $a_2 = \frac{1}{2}$, puis par récurrence directe que $a_{2p} = \dfrac{-1}{2p}\dfrac{-1}{2p-2}\dots\dfrac{-1}{4}a_2 = \dfrac{(-1)^{p-1}}{2^p p!}$ (on a mis 2 en facteur dans tous les termes du dénominateur).

Réciproquement posons f la somme de la série entière $\sum \frac{(-1)^{p-1}}{2^p p!}x^{2p}$, cette SE admet $+\infty$ comme rayon de convergence (et est solution de l'ED par construction), pour le montrer on va en même temps gagner du temps sur la question suivante en remarquant que $\frac{(-1)^{p-1}}{2^p p!}x^{2p} = \frac{-1}{p!}\left(\frac{-x^2}{2}\right)^p$, ainsi $f(x) = 1 - \exp(-x^2/2)$.

(c) Déjà fait.

4° Tout d'abord : $\forall x \in]-1, 1[$, $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$.

Ici on désire faire $x = 1$, mais on a pas le droit, l'égalité n'a lieu que pour $x \in]-1, 1[$. Posons, pour $x \in [0, 1]$, et $n \in \mathbb{N}^\star$, $f_n(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$ et notons S la somme de cette série de fonctions.

Cette série de fonction converge simplement sur $[0, 1[$ vers $x \mapsto \ln(1+x)$, de plus elle converge aussi pour $x = 1$ (série harmonique alternée). Montrons que la convergence est uniforme sur $[0, 1]$:

pour $x \in [0, 1]$, $\sum f_n(-x)$ est une série alternée spéciale qui relève du TSA (car $\left(\dfrac{x^n}{n}\right)$ est décroissante et tend vers 0), on a donc la majoration du reste d'ordre n : $|R_n(x)| \leq \frac{x^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$, ce dernier majorant ne dépend pas de x et tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, dit autrement $\|R_n\|_\infty^{[0,1]}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, ainsi le reste converge uniformément vers 0, on a donc la convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $[0, 1]$. Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0, 1]$, il en va donc de même pour S, il ne reste plus qu'a utiliser la continuité en 1 pour obtenir $\ln(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

On peut appliquer le DSE à $x = -1/2$ pour obtenir (après multiplication par -1) : $\ln(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}$.

Exercice 2 *(CCP PSI 2019, problème 1).*

Partie I – Deux exemples de fonctions indéfiniment dérivables

Correction :

Q1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $t \mapsto e^{-t(1-itx)}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, ainsi l'intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$. Or $t^2|e^{-t(1-itx)}| = t^2 e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par croissance comparée), ainsi $e^{-t(1-itx)} = \underset{t\to+\infty}{o}(\frac{1}{t^2})$, comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathsf{d}t$ converge (intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$) on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t(1-itx)}\mathsf{d}t$ converge absolument donc converge, ainsi $f(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q2. Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé, la fonction $t \mapsto t^p e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, ainsi l'intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$. Or $t^2 t^p e^{-t} = t^{p+2}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (par croissance comparée), ainsi $t^p e^{-t} = \underset{t\to+\infty}{o}(\frac{1}{t^2})$, comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathsf{d}t$ converge (intégrale de Riemann de paramètre $2 > 1$) on en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^p e^{-t}\mathsf{d}t$ converge, ainsi Γ_p est bien définie pour tout $p \in \mathbb{N}$.
Posons, pour $t \geq 0$, $u(t) = t^{p+1}$ (ainsi $u'(t) = (p+1)t^p$) et $v(t) = -e^{-t}$ (ainsi $v'(t) = e^{-t}$), les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, le crochet $\Big[u(t)v(t)\Big]_0^{+\infty}$ converge (et vaut 0), ainsi on peut procéder à une intégration par parties et on trouve $\Gamma_{p+1} = \Big[-t^{p+1}e^{-t}\Big]_0^{+\infty} + \displaystyle\int_0^{+\infty}(p+1)t^p e^{-t}\mathsf{d}t$, ie $\Gamma_{p+1} = (p+1)\Gamma_p$.

Q3. On a $\Gamma_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathsf{d}t = \Big[-e^{-t}\Big]_0^{+\infty} = 1$. Ainsi, par récurrence directe avec la relation précédente on a $\Gamma_p = p!$.

Q4. Soit $p \in \mathbb{N}$, montrons que f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ avec le théorème de dérivation $\mathcal{C}^p$ des intégrales à paramètres, pour cela on pose pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+$, $g(x,t) = e^{-t(1-itx)} = e^{-t}e^{it^2x}$.

— À $t \geq 0$ fixé, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$, de plus pour tout $\ell \in [\![0,p]\!]$ et pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ on a : $\frac{\partial^\ell g}{\partial x^\ell}(x,t) = (it^2)^\ell e^{-t}e^{it^2x}$.

— Pour $\ell \in [\![0,p-1]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$ fixé, $t \mapsto \frac{\partial^\ell g}{\partial x^\ell}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, de plus on a $\left|\frac{\partial^\ell g}{\partial x^\ell}(x,t)\right| = t^{2\ell}e^{-t} = \underset{t\to+\infty}{o}(\frac{1}{t^2})$, ainsi $t \mapsto \frac{\partial^\ell g}{\partial x^\ell}(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

— Hypothèse de domination. Pour $(x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, on a $\left|\frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x,t)\right| = t^{2p}e^{-t}$, on a bien majoré (on a même égalité) par une fonction intégrable (d'après **Q2**) qui ne dépend pas de x, l'hypothèse de domination est ainsi établie.

Ainsi la fonction f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(p)}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x,t)\mathsf{d}t$. Comme c'est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a bien que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, de plus pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a $f^{(p)}(x) = i^p\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2p}e^{-t}e^{it^2x}\mathsf{d}t$.

Q5. D'après la question précédente, pour $p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(0) = i^p\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2p}e^{-t}\mathsf{d}t = i^p\Gamma_{2p}$. Ainsi (d'après **Q3**) on a $\frac{f^p(0)}{p!} = \frac{i^p(2p)!}{p!}$. Ce terme général n'est jamais nul, ainsi pour $x \neq 0$: $\dfrac{\left|\frac{i^{p+1}(2p+2)!}{(p+1)!}x^{p+1}\right|}{\left|\frac{i^p(2p)!}{p!}x^p\right|} = \frac{(2p+2)(2p+1)|x|}{p+1} = 2(2p+1)|x| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ainsi pour tout $x \neq 0$ la série $\sum\frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p$ diverge grossièrement d'après la règle de d'Alembert. Ainsi son rayon de convergence est 0.
Si f était développable en série entière alors f serait égal à sa série de Taylor dans un voisinage centré en 0 et non réduit à 0, ce qui n'est pas le cas puisque la série de Taylor diverge pour $x \neq 0$, ainsi f n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

Q6. Soit $p \in \mathbb{N}$, montrons que f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ avec le théorème de dérivation terme à terme pour cela on pose pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, $g_k(x) = e^{-k(1-ikx)} = e^{-k}e^{ik^2x}$.

— Pour tout $k \in \mathbb{N}$, g_k est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$, de plus pour tout $\ell \in [\![0,p]\!]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g_k^{(\ell)}(x) = (ik^2)^\ell e^{-k}e^{ik^2x}$.

— Pour tout $\ell \in [\![0, p-1]\!]$, la série $\sum g_k^{(\ell)}$ converge simplement, en effet à $x \in \mathbb{R}$ fixé, $|g_k^{(\ell)}(x)| = k^{2\ell}\mathrm{e}^{-k} = \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ et $\sum \frac{1}{k^2}$ est une série de Riemann convergente.

— Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a $|g_k^{(p)}(x)| = k^{2p}\mathrm{e}^{-k}$ qui ne dépend pas de x, ainsi en prenant le sup sur x on a montré que $\|g_k^{(p)}\|_\infty = k^{2p}\mathrm{e}^{-k}$, avec le même argument que pour le point précédent on a que $\sum \|g_k^{(p)}\|_\infty$ converge, ainsi $\sum g_k^{(p)}$ converge normalement (donc uniformément) sur $\mathbb{R}$.

Ainsi g est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$, comme c'est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

De plus on a montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$: $g^{(p)}(x) = \mathrm{i}^p \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p}\mathrm{e}^{-k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k^2x}$

Q7. Pour $p \in \mathbb{N}$, on a (d'après la question précédente) : $\left|g^{(p)}(0)\right| = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k^{2p}\mathrm{e}^{-k}$ (car $|\mathrm{i}| = 1$ et une somme de termes positifs est positive), ainsi $\left|g^{(p)}(0)\right| = p^{2p}\mathrm{e}^{-p} + \displaystyle\sum_{\substack{k=0\\k\neq p}}^{+\infty} k^{2p}\mathrm{e}^{-k} \geq p^{2p}\mathrm{e}^{-p}$ (car la somme est positive). Ce qui est bien la minoration demandée.

Q8. Pour $x \neq 0$ et $p \in \mathbb{N}$ on a $\dfrac{\left|\frac{(p+1)^{2p+2}\mathrm{e}^{-p-1}x^{p+1}}{(p+1)!}\right|}{\left|\frac{p^{2p}\mathrm{e}^{-p}x^p}{p!}\right|} = \left(1+\frac{1}{p}\right)^{2p}(p+1)\mathrm{e}^{-1}|x| \geq p\mathrm{e}^{-1}|x| \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ (si on ne pense pas à la majoration on peut montrer que $\displaystyle\lim_{p\to+\infty}\left(1+\frac{1}{p}\right)^{2p} = \mathrm{e}^2$). Ainsi, d'après le critère de d'Alembert $\sum \frac{p^{2p}\mathrm{e}^{-p}x^p}{p!}x^p$ diverge grossièrement, ainsi l'inégalité de la question précédente et le critère de comparaison des séries à terme positives montre que pour tout $x \neq 0$, $\sum\left|\frac{g^{(p)(0)}}{p!}x^p\right|$ diverge. Son rayon de convergence est donc 0 (s'il était strictement positif on aurait de la convergence absolue dans le disque ouvert de convergence, ce qui n'est pas possible).

Comme à la question **Q5** on en déduit que g n'est pas développable en série entière au voisinage de 0.

Partie II – Le théorème de Borel

Correction :

Q9. On remarque que pour $a = \frac{1}{2\mathrm{i}}$ et $b = \frac{-1}{2\mathrm{i}}$ on a bien : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}} - \frac{1}{x+\mathrm{i}}\right)$.

Q10. Tout d'abord, ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-\mathrm{i})^{p+1}}$.

Initialisation : Pour $p = 0$: pour $x \in \mathbb{R}$, on a d'une part $\psi^{(0)}(x) = \psi(x) = \frac{1}{x-\mathrm{i}}$ et d'autre part $\frac{(-1)^0 0!}{(x-\mathrm{i})^{0+1}} = \frac{1}{x-\mathrm{i}}$ la formule est ainsi établie et la propriété est donc bien initialisée.

Hérédité : Supposons la propriété vraie à un certain $p \in \mathbb{N}$, on a donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-\mathrm{i})^{p+1}}$, on dérive l'égalité et on obtient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\psi^{(p+1)}(x) = -(p+1)\frac{(-1)^p p!}{(x-\mathrm{i})^{p+2}} = \frac{(-1)^{p+1}(p+1)!}{(x-\mathrm{i})^{p+2}}$, c'est-à-dire la propriété au rang $n+1$, ce qui montre bien l'hérédité.

On a bien montré : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p p!}{(x-\mathrm{i})^{p+1}}$.

Q11. On démontre de la même manière qu'a la question précédente (on peut aussi utiliser le fait que la conjugué de la dérivée est égal à la dérivée de la conjugué) que la dérivée p-ième (pour $p \in \mathbb{N}$) de $x \mapsto \frac{1}{x+\mathrm{i}}$ est $x \mapsto \frac{(-1)^p p!}{(x+\mathrm{i})^{p+1}}$.

On a montré à la question **Q9** que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\varphi_1(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{x-\mathrm{i}} - \frac{1}{x+\mathrm{i}}\right)$. En combinant ces résultats on a donc pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, que : $\varphi_1^{(p)}(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{(-1)^p p!}{(x-\mathrm{i})^{p+1}} - \frac{(-1)^p p!}{(x+\mathrm{i})^{p+1}}\right) = \frac{(-1)^p p!}{2\mathrm{i}}\frac{(x+\mathrm{i})^{p+1}-(x-\mathrm{i})^{p+1}}{(x^2+1)^{p+1}}$.

Q12. Pour $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $\left|(x+\mathrm{i})^{p+1} - (x-\mathrm{i})^{p+1}\right| = \left|(x+\mathrm{i})^{p+1} - \overline{(x-\mathrm{i})^{p+1}}\right| = \left|2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}((x+\mathrm{i})^{p+1})\right|$. Or on sait que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|\,\mathrm{Im}(z)| \leq |z|$, ainsi $\left|(x+\mathrm{i})^{p+1} - (x-\mathrm{i})^{p+1}\right| \leq 2\left|(x+\mathrm{i})^{p+1})\right| = 2\sqrt{x^2+1}^{p+1}$, qui est bien le résultat demandé.

On combine avec la question précédente, ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^\star$, on a : $\left|\varphi_1^{(p)}(x)\right| = \left|\frac{(-1)^p p!}{2\mathrm{i}}\frac{(x+\mathrm{i})^{p+1}-(x-\mathrm{i})^{p+1}}{(x^2+1)^{p+1}}\right| \leq p!\frac{\sqrt{x^2+1}^{p+1}}{(x^2+1)^{p+1}} = \frac{p!}{(x^2+1)^{(p+1)/2}}$. Comme $x \neq 0$, on a $\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2}$ et donc $\frac{1}{(x^2+1)^{(p+1)/2}} \leq \frac{1}{(x^2)^{(p+1)/2}} = \frac{1}{|x|^{p+1}}$. Ce qui montre bien que $\left|\varphi_1^{(p)}(x)\right| \leq \frac{p!}{|x|^{p+1}}$.

Q13. Tout d'abord on remarque que l'inégalité est juste pour $\alpha = 0$, supposons maintenant $\alpha \neq 0$.

On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi_\alpha(x) = \varphi_1(\alpha x)$, ainsi (récurrence directe) : pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour

tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\varphi_\alpha^p(x) = \alpha^p \varphi_1(\alpha x)$. En utilisant la question précédente (on a bien $\alpha x \neq 0$) on en déduit que pour tout $x \neq 0$: $|\varphi_\alpha^p(x)| \leq |\alpha^p| \frac{p!}{|\alpha x|^{p+1}} = \frac{1}{|\alpha|} \frac{p!}{|x|^{p+1}}$, il ne reste plus qu'a multiplier des deux côtés par $|\alpha| > 0$ pour en déduire l'inégalité demandée.
On a bien montré que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \neq 0$: $|\alpha||\varphi_\alpha^p(x)| \leq \frac{p!}{|x|^p}$

Q14. On remarque que pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, que $u_n(x) = v_n(x)\varphi_{\alpha_n}(x)$, où $v_n : x \mapsto a_n x^n$. Ainsi u_n est le produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, on peut donc appliquer la formule de Leibniz pour calculer la dérivée p-ième, de plus pour $k \in [\![0, n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$, $v_n^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$. Ainsi pour $p \leq n$ on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ u_n^{(p)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} v_n^{(k)}(x) \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x) = a_n \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)$.

Q15. Soit $n \in \mathbb{N}$, pour $p \in [\![0, n-1]\!]$, on remarque que pour tout $k \in [\![0, p]\!]$ on a $n - k > 0$ et donc tous les termes de la somme obtenue à la question précédente s'annule pour $x = 0$, ce qui montre bien que $u_n^{(p)}(0) = 0$.
Pour $p = n$, tous les termes pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ s'annule pour $x = 0$, il ne reste donc que celui correspondant à $k = n$, ainsi $u_n^{(n)}(0) = a_n \binom{n}{n} \frac{n!}{(0)!} \varphi_{\alpha_n}^{(0)}(0) = n! a_n \varphi_{\alpha_n}(0) = n! a_n$.

Q16. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, $p \in [\![0, n-1]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$ l'inégalité demandée n'est rien d'autre (d'après la question précédente) que $0 \leq 0$, ce qui est juste, on suppose maintenant $x \neq 0$.
On a montré à la question **Q13**, pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, que $|\varphi_{\alpha_n}^{(p-k)}(x)| \leq \frac{1}{|\alpha_n|} \frac{(p-k)!}{|x|^{p-k+1}}$. En combinant ceci à l'inégalité triangulaire appliquée à la formule de la question **Q14** on obtient : $|u_n^{(p)}(x)| \leq |a_n| \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} |x|^{n-k} \frac{1}{|\alpha_n|} \frac{(p-k)!}{|x|^{p-k+1}} = |a_n| \frac{1}{|\alpha_n|} |x|^{n-p-1} p! \sum_{k=0}^{p} \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Or, comme $p \leq n$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{n!}{k!(n-k)!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. On a donc montré $|u_n^{(p)}(x)| \leq |a_n| \dfrac{1}{|\alpha_n|} |x|^{n-p-1} p! 2^n = \dfrac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n$ (en utilisant la définition de $\alpha_n = \sqrt{n!} a_n$).

Q17. Soit $p \in \mathbb{N}$, montrons que U est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$ avec le théorème de dérivation terme à terme (version $\mathcal{C}^p$ sur tout segment).
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est de classe $\mathcal{C}^p$ sur $\mathbb{R}$.
— Pour tout $\ell \in [\![0, p]\!]$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a (d'après la question précédente) : $|u_n^{(\ell)}(x)| \leq \frac{|x|^{n-\ell-1}}{\sqrt{n!}} \ell! 2^n$.
Posons $x_n = \frac{(2x)^n}{\sqrt{n!}} > 0$, on a $\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \frac{2|x|}{\sqrt{n+1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, ainsi d'après le critère de d'Alembert $\sum x_n$ converge absolument, donc, par comparaison, $\sum u_n^{(\ell)}(x)$ converge aussi absolument donc converge, ce qui montre bien la convergence simple de $\sum u_n^{(\ell)}$.
— Soit $a > 0$, pour tout $x \in [-a, a]$ et pour $n \geq p + 1$: $|u_n^{(p)}(x)| \leq \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n \leq \frac{|a|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n$, comme notre majorant ne dépend pas de x, en passant au sup sur $x \in [-a, a]$, on a $\|u_n^{(p)}\|_\infty^{[-a,a]} \leq \frac{|a|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}} p! 2^n = x_n$, or $\sum x_n$ converge (d'après le point précédent) on a que $\sum_{n>p} \|u_n^{(p)}\|_\infty^{[-a,a]}$ converge, et donc que $\sum_{n\geq 0} \|u_n^{(p)}\|_\infty^{[-a,a]}$ (tous les u_n sont continues sur $[-a, a]$ donc la norme infinie de u_n sur $[-a, a]$ existe, et les premiers termes ne changent pas la nature de la série) converge, ce qui montre que $\sum u_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[-a, a]$.

Ainsi U est de classe $\mathcal{C}^p$ sur tous les segments $[-a, a]$ de $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}$, comme c'est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. De plus pour tout $p^{\in}\mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $U^{(p)}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}(x)$.

Q18. Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après la définition de u_n on a $u_0(0) = a_0$ et pour $n > 0$, $u_n(0) = 0$, ce qui montre bien que $U(0) = 0$.
Soit $p \in \mathbb{N}$, d'après la question **Q15** on a $u_n^{(p)}(0) = 0$ si $p \leq n - 1$ (ie si $n \geq p + 1$) que $u_p^{(p)}(0) = p! a_p$. Ainsi, avec la question précédente, on a $U^{(p)}(0) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p! a_p$, qui est le résultat escompté.

Q19. Procédons par analyse synthèse et supposons qu'on a construit une suite (a_n) telle que la fonction U précédemment définie soit telle que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $U^{(p)}(0) = b_p$.
— On a $U^{(0)}(0) = a_0$, ainsi $a_0 = b_0$.
— On a $U^{(1)}(0) = u_0'(0) + a_1$, ainsi $a_1 = b_1 - u_0'(0)$ (on remarquera que u_0 ne dépend que du choix de a_0).
— On a $U^{(2)}(0) = u_0''(0) + u_1''(0) + 2a_2$, ainsi $a_2 = b_2 - u_0''(0) - u_1''(0)$ (on remarquera que u_1 ne dépend que du choix de a_1).
— Par suite on a pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_p = \dfrac{1}{p!} \left(b_p - \displaystyle\sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) \right)$, on remarquera que a_p ne dépend que des

$a_0,\dots,a_{p-1}$ et pas des suivant.
On termine notre phase d'analyse, on a même presque démontré la synthèse dedans. En effet on pose $a_0=b_0$, ainsi u_0 est défini, on pose ensuite $a_1=b_1-u_0'(0)$, ainsi u_1 est défini, supposons construit $a_0,\dots,a_{p-1}$, ainsi $u_0,\dots u_{p-1}$ sont définis et on pose $a_p=\dfrac{1}{p!}\left(b_p-\displaystyle\sum_{n=0}^{p-1}u_n^{(p)}(0)\right)$. On a donc construit correctement par récurrence une suite (a_n). La fonction U associée est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, d'après la question précédente, $U(0)=a_0=b_0$ et pour tout $p>1$, $U^{(p)(0)}=\sum_{n=0}^{p-1}u_n^{(p)}(0)+p!a_p=\sum_{n=0}^{p-1}u_n^{(p)}(0)+b_p-\sum_{n=0}^{p-1}u_n^{(p)}(0)=b_p$. Ce qui démontre le théorème de Borel.

Exercice 3 *(*E3A PSI 2020*, exercice 4).*

1° Par bilinéarité de Φ on a : $\Phi(X,Y)=x_1y_1\Phi(\vec{i},\vec{i})+x_1y_2\Phi(\vec{i},\vec{j})+x_2y_1\Phi(\vec{j},\vec{i})+x_2y_2\Phi(\vec{j},\vec{j})=x_1y_1+(x_1y_2+x_2y_1)\cos(\theta)+x_2y_2$.

2° On a déjà que Φ est une forme linéaire bilinéaire, la question précédente montre en particulier qu'elle est symétrique.
Soit $X=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}\in E$, on a $\Phi(X,X)=x_1^2+2x_1x_2\cos(\theta)+x_2^2$, or $-1\le\cos(\theta)\le 1$, ainsi $x_1^2-2x_1x_2+x_2^2\le\Phi(X,X)\le x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$, ainsi $(x_1-x_2)^2\le\Phi(X,X)\le(x_1+x_2)^2$, comme $(x_1-x_2)^2\ge 0$ on a bien $\Phi(X,X)\ge 0$.
Si de plus on a $\Phi(X,X)=0$, alors, de l'encadrement précédent, on en déduit que $(x_1-x_2)^2=0$, ainsi $x_1=x_2$, on en déduit donc que $\Phi(X,X)=2x_1^2(1+\cos(\theta))$, comme $\theta\in]0,\pi[$, on a $(1+\cos(\theta))\neq 0$, ainsi $x_1^2=0$, par suite $X=\vec{0}$.
On a bien montré que Φ est une forme linéaire définie positive sur E, ie un produit scalaire sur E.
Alternative pour positif et défini positif, on peut remarquer que : $\Phi(X,X)=(x_1+\cos(\theta)x_2)^2+x_2^2(1-\cos^2(\theta))$, comme $1-\cos^2(\theta)=\sin^2(\theta)>0$, on est en présence d'une somme de termes positifs, donc est positive, si elle est nulle on a donc $(x_1+\cos(\theta)x_2)^2=0$ et $x_2^2\sin^2(\theta)=0$, comme le sinus est non nul on a $x_2=0$ et par suite $x_1=0$, d'où $X=0$.

3° Soit $X=x_1\vec{i}+x_2\vec{j}\in E$, on a $f(X)=-x_2\vec{i}+(x_1+2x_2\cos(\theta))\vec{j}$. Ainsi (avec 1°) on a : $\Phi(f(X),f(X))=(-x_2)^2+2(-x_2)(x_1+2x_2\cos(\theta))\cos(\theta)+(x_1+2x_2\cos(\theta))^2=x_2^2-2x_1x_2\cos(\theta)-4x_2^2\cos^2(\theta)+x_1^2+4x_1x_2\cos(\theta)+4x_2^2\cos^2(\theta)=x_1^2+2x_1x_2\cos(\theta)+x_2^2=\Phi(X,X)$. Ainsi, si on pose $\|X\|=\sqrt{\Phi(X,X)}$ la norme associée, on a montré, pour tout $X\in E$, que $\|f(X)\|=\|X\|$, ie que f est une isométrie.

4° Appliquons le procédé de Gram-Schmidt à la base $\mathcal{B}$, le premier vecteur est bien unitaire, on pose $\tilde{k}=\vec{j}-\Phi(\vec{j},\vec{i})\vec{i}=\vec{j}-\cos(\theta)\vec{i}$. On a $\Phi(\tilde{k},\tilde{k})=\cos^2(\theta)-2\cos^2(\theta)+1=1-\cos^2(\theta)=\sin^2(\theta)$. Comme $\sin(\theta)>0$ (car θ est entre 0 et π strictement), on peut poser $\vec{k}=\frac{1}{\sin(\theta)}(-\cos(\theta)\vec{i}+\vec{j})$.
La famille $(\vec{i},\vec{k})$ est l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de $\mathcal{B}$, c'est donc une base orthonormée, de plus $\Phi(\vec{j},\vec{k})=\frac{1}{\sin(\theta)}\Phi(\vec{j},-\cos(\theta)\vec{i}+\vec{j})=\frac{1}{\sin(\theta)}(-\cos^2\theta+1)>0$ (toujours car $\theta\in]0,\pi[$.

5° On remarque que la définition de $\vec{k}$ donne directement $\sin(\theta)\vec{k}=-\cos(\theta)\vec{i}+\vec{j}$, ie $\vec{(j)}=\cos(\theta)\vec{i}+\sin(\theta)\vec{k}$.
On a $f(\vec{i})=\mathrm{Vect}(j)=\cos(\theta)\vec{i}+\sin(\theta)\vec{k}$. On a donc la première colonne de la matrice M de f dans la base $(\vec{i},\vec{k})$, pour continuer on peut déterminer la deuxième colonne en calculant $f(\vec{j})$ ou plus rapidement utiliser que f est une isométrie et comme $\det(C)=1$ on a $M\in\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Ainsi M est une matrice de rotation, comme on connait la première colonne on en déduit que $M=\begin{pmatrix}\cos(\theta)&-\sin(\theta)\\ \sin(\theta)&\cos(\theta)\end{pmatrix}$, f est donc la rotation d'angle θ de E.
Alternative : on peut déterminer la matrice de passage entre les deux bases et utiliser la formule de changement de base pour obtenir M.

6° Pour $m\in\mathbb{N}^\star$, f^m est la rotation d'angle $m\theta$, ainsi $f^m=\mathrm{id}_E\iff m\theta\equiv 0\,[\mathrm{mod}\ 2\pi]$.
On a donc $f^m=\mathrm{id}_E$ si et seulement si $\theta\in\left\{\frac{2k\pi}{m},\,k\in]\!]0,\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor]\!]\right\}$ ($]\!]0,\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor]\!]$ car θ doit être entre 0 et π strictement, on remarquera que pour $m\in\{1,2\}$ il n'y a pas de θ qui marche, pour $m=3$ il n'y a que $\theta=\frac{2\pi}{3}$, etc.).

Exercice 4 *(problème 1* CCP PSI 2018*, partie III : Une équation de Bessel).*

Correction :

Q19. Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est $R = \sup\left\{r \geq 0 \,/\, (a_n r^n)_n \text{ est bornée}\right\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Q20. J_0 est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et on peut dériver terme à terme. Pour $x \in]-R, R[$ on a $J_0(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$, $J_0'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^{k-1}$ et $J_0''(x) = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} x^2 J_0''(x) + x J_0'(x) + x^2 J_0(x) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) c_k x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^k + \sum_{k=2}^{+\infty} c_{k-2} x^k \\ &= c_1 x + \sum_{k=2}^{+\infty} (k^2 c_k + c_{k-2}) x^k. \end{aligned}$$

Ainsi J_0 est solution de (4) si et seulement si $c_1 = 0$ et $\forall\, k \geq 2$, $c_k = -\dfrac{c_{k-2}}{k^2}$.
Comme, de plus, $c_0 = 1$ par hypothèse, on montre, par récurrence directe, que $\forall k \in \mathbb{N}$, $c_{2k+1} = 0$ et $c_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{4^k\,(k!)^2}$.

Q21. La série considérée est $\sum c_{2k} x^{2k}$. Pour $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}$ on pose $u_k(x) = c_{2k} x^{2k}$. Ainsi, $\left|\dfrac{u_{k+1}(x)}{u_k(x)}\right| = \left|\dfrac{x^2}{4(k+1)^2}\right| \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$. Donc le critère de d'Alembert permet de conclure que cette série entière converge pour tout réel $x > 0$ et que son rayon de convergence est donc $R = +\infty$.

Remarque On a donc prouvé que la somme de cette série entière, appelée J_0 dans l'énoncé, est une solution de (4) sur $\mathbb{R}$.

Q22. J_0 est continue sur $\mathbb{R}$, donc continue sur le segment $[0, r]$ et donc bornée sur ce segment. Comme J_0 n'est pas la fonction nulle (elle vaut 1 en 0), donc si (J_0, f) est une famille liée de l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $]0, r[$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f = aJ_0$ et f est ainsi bornée sur $]0, r[$ et donc au voisinage de 0.

Q23. Par produit de Cauchy, appliqué aux séries entières (absolument convergentes dans l'intervalle ouvert de convergence) :

$$\forall\, x \in]-R_\alpha, R_\alpha[\cap]-R_\beta, R_\beta[, \quad \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}\right) x^n.$$

Or, cette somme vaut 1 par hypothèse donc, par unicité d'écriture d'une série entière, on a :

$$\alpha_0 \beta_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} = 0.$$

Comme $\alpha_0 = 1$ par hypothèse, on obtient :

$$\beta_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} = 0.$$

.

Q24. Puisque $0 < r < R_\alpha$, par définition du rayon de convergence, la suite $(\alpha_k r^k)_k$ est bornée, donc il existe $M > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $|\alpha_k r^k| \leq M$ (ie $|\alpha_k| \leq \dfrac{M}{r^k}$.

Q25. L'existence d'une unique solution $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de (5) est assez immédiate, comme $\beta_0 = 1$ on a existence et unicité de β_0, comme $\alpha_0 = 1$, la seconde relation dit juste, pour tout $n \geq 1$, que $\beta_n = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \beta_{n-k}$, comme la somme dans le membre de droite ne fait intervenir que $\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}$, on en déduit que l'existence et l'unicité des β_k pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ implique l'existence et l'unicité de β_n. Ce qui montre bien le résultat.
Montrons par récurrence (forte) sur $k \in \mathbb{N}^*$ que : H_k : « $|\beta_k| \leq \dfrac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}$ ».

— Initialisation : La relation (5) fournit $\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 = 0$. Donc $\beta_1 = -\alpha_1$ et $|\beta_1| = |\alpha_1| \leq \dfrac{M}{r}$. Cela montre H_1.

— Hérédité : Prenons k dans $\mathbb{N}^*$ tel que H_1, ..., H_k soient vraies et montrons que H_{k+1} est vraie. On a :

$$\begin{aligned}
|\beta_{k+1}| &= \left|-\sum_{j=0}^{k} \alpha_{k+1-j}\ \beta_j\right| \quad (\text{car } \alpha_0 = 1)\\
&\leq \sum_{j=0}^{k} |\alpha_{k+1-j}|\ |\beta_j|\\
&\leq \frac{M}{r^{k+1}} + \sum_{j=1}^{k} \frac{M}{r^{k+1-j}} \times \frac{M(M+1)^{j-1}}{r^j} \quad (\text{d'après Q.24 et l'hyp. de récurrence})\\
&\leq \frac{M}{r^{k+1}} + \frac{M^2}{r^{k+1}}\ \left|\frac{(M+1)^k - 1}{(M+1)-1}\right|\\
&\leq \frac{M(M+1)^k}{r^{k+1}}
\end{aligned}$$

Ainsi, H_{k+1} est vraie et l'on a établi le résultat souhaité par récurrence.

Q26. On déduit de la question précédente, pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ que : $|\beta_k x^k| \leq \dfrac{M}{M+1}\left|\dfrac{(M+1)x}{r}\right|^k$.

Le membre de droite est le terme général d'une série géométrique convergente si $\left|\dfrac{(M+1)x}{r}\right| < 1$, la série entière est donc convergente pour les x tels que $|x| < \frac{r}{M+1}$, on a donc que $R_\beta \geq \frac{r}{M+1} > 0$

Q27. On note : $\forall\, x \in]0, r[$, $y(x) = \lambda(x) J_0(x)$ avec λ fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, r[$. Ainsi, y est aussi de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, r[$. Comme J_0 est solution de (4), on obtient :

$$\forall x \in]0, r[,\ x^2 y''(x) + xy'(x) + x^2 y(x) = x^2 \lambda''(x) J_0(x) + 2x^2 \lambda'(x) J_0'(x) + x\lambda'(x) J_0(x).$$

De plus , en notant $\forall x \in]0, r[$, $h(x) = x\lambda'(x) J_0^2(x)$, on a :

$$\begin{aligned}
h'(x) &= \lambda'(x) J_0^2(x) + x\lambda''(x) J_0^2(x) + x\lambda'(x)\ 2J_0(x) J_0'(x)\\
&= \frac{J_0(x)}{x}\ \left(x^2 y''(x) + xy'(x) + x^2 y(x)\right).
\end{aligned}$$

- Il est donc clair que si y est solution de (4) sur $]0, r[$ alors h est de dérivée nulle sur $]0, r[$.
- Réciproquement, supposons que $h'(x) = 0$ pour tout $x \in]0, r[$. Notons $g : x \mapsto x^2 y''(x) + xy'(x) + x^2 y(x)$. Supposons qu'il existe $x_0 \in]0, r[$ tel que $g(x_0) \neq 0$. Par continuité, g serait non nulle sur un sous-intervalle de $]0, r[$ centré en x_0 et J_0 serait donc nulle sur cet intervalle. Comme J_0 est solution de $u'' + \dfrac{1}{x} u' + u = 0$ sur $]0, r[$, J_0 serait identiquement nulle sur $]0, r[$ d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz comme unique solution de (4) s'annulant ainsi que sa dérivée en x_0. Elle serait donc nulle en 0 par continuité. Cela contredirait la définition de J_0 ($c_0 = 1$). Donc g est nulle et y est solution de (4) sur $]0, r[$.

Q28. Par théorème sur le produit de Cauchy des séries entières, J_0^2 est somme d'une série entière de rayon $+\infty$. De plus, $J_0^2(0) = 1$.

Q29. Cherchons une fonction λ et un réel $r > 0$ tels que $\forall x \in]0, r[$, $xJ_0^2(x)\lambda'(x) = 1$.
La question Q27. nous assure alors que $(x \mapsto \lambda(x) J_0(x))$ est solution de (4) sur $]0, r[$.
La question Q28. permet d'appliquer le paragraphe sur l'inverse d'une série entière non nulle en 0 à J_0^2.
Il existe donc une série entière $\sum \beta_k x^k$ de rayon $r > 0$ et telle que $\beta_0 = 1$ qui vérifie :

$$\forall x \in]0, r[,\ J_0^2(x)\ \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k\right) = 1, \quad \text{ainsi } xJ_0^2(x)\ \left(\frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k x^{k-1}\right) = 1‘.$$

En prenant, pour $x \in]0, r[$, $\lambda(x) = \ln(x) + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k \frac{x^k}{k}$, on obtient bien que : $\forall x \in]0, r[$, $xJ_0^2(x)\lambda'(x) = 1$.

Posons alors pour $x \in]0, r[$: $\eta(x) = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k \frac{x^k}{k}\right) \times J_0(x)$. Par produit de Cauchy, η est la somme d'une série entière de rayon $R_\eta > 0$ et, d'après la question Q27., $J_1 : x \mapsto \eta(x) + \ln(x)\ J_0(x)$ est solution de (4) sur $]0, R_\eta[$.

Q30. Puisque $J_0(0) = 1$, la fonction $J_1 = \eta + J_0 \times \ln$ n'est pas bornée sur $]0, R_\eta[$. D'après la question Q22., la famille (J_0, J_1) est donc libre dans l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, R_\eta[$ et l'on a une base de solutions de (4). On en déduit que l'ensemble des solutions de (4) sur $]0, R_\eta[$ est : $\left\{aJ_0 + b(\eta + J_0 \times \ln) \,/\, (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\} = \mathrm{Vect}(J_0, \eta + J_0 \times \ln)$.