

4h sans calculatrice

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats, il numérotera aussi ses pages.

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

**Exercice 1** *Formule de Wald, Processus de Galton-Watson (CENTRALE PSI 2015 Maths 1).*

Dans ce problème, nous étudions le processus de Galton-Watson qui permet entre autres de modéliser le développement d'une population. Ce processus est par exemple utilisé en biologie ou en physique nucléaire.

Dans tout le problème, on se place dans un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ .

Si  $X$  est une variable aléatoire entière et positive sur cet espace, on notera  $G_X$ , série entière de rayon de convergence au moins 1, la fonction génératrice de  $X$ . On rappelle que la fonction génératrice de  $X$  est la somme de la série entière :

$$\forall t \in [-1, 1], G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)t^n$$

La fonction génératrice d'une variable aléatoire caractérise sa loi. Plus précisément, si  $X$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et si  $(a_n)$  est une suite de réels positifs tels que, pour tout  $t \in [0, 1[$ ,  $G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ , alors, pour tout

$n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = \mathbb{P}(X = n)$ .

On admettra le théorème suivant (lemme de Cesaro) : si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de nombres réels convergente vers  $\ell$  et si on pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $b_n = \frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$  alors la suite  $(b_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $\ell$ .

## I] Étude d'une suite récurrente

On considère une fonction  $f$  de classe  $C^2$  sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $[0, 1]$  telles que  $f'$  et  $f''$  soient à valeurs positives. On suppose  $f(1) = 1$ ,  $f'(0) < 1$  et  $f''(1) > 0$ .

On considère de plus la suite récurrente  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ . On pose  $m = f'(1)$ .

**I.A**

**I.A.1)** Montrer que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante, puis quelle est convergente. On note  $\ell$  sa limite.

**I.A.2)** Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une plus petite solution. Dans toute la suite, on la notera  $x_f$ .

**I.A.3)** Montrer que  $\ell = x_f$ .

**I.B** On suppose  $m > 1$ . Montrer que  $x_f \in [0, 1[$ .

**I.C** On suppose maintenant  $m \leq 1$ . Montrer que  $x_f = 1$  et que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \neq 1$ .

**I.D** Dans cette question, on suppose  $m = 1$ .

**I.D.1)** On pose, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon_n = 1 - u_n$ . Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \frac{1}{\varepsilon_n} \right) = \frac{f''(1)}{2}$$

**I.D.2)** En déduire que, quand  $n$  tend vers l'infini,  $1 - u_n \sim \frac{2}{nf''(1)}$ .

On pourra utiliser le lemme de Césaro admis en préambule.

**I.E** On suppose maintenant  $m < 1$  et on pose encore, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon_n = 1 - u_n$ .

**I.E.1)** Montrer que la série de terme général  $\varepsilon_n$  est absolument convergente et en déduire la convergence de celle de terme général  $\ln \left( \frac{m^{-(n+1)} \varepsilon_{n+1}}{m^{-n} \varepsilon_n} \right)$ .

**I.E.2)** En déduire qu'il existe  $c > 0$  tel que, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $1 - u_n \sim cm^n$ .

## II] Formule de Wald

Soient  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, de même loi à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , et  $T$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  indépendante des précédentes.  $(T, X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

On note  $G_X$  la fonction génératrice commune à toutes les  $X_n$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $\omega \in \Omega$ , on pose  $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^n X_k(\omega)$  et  $S_0(\omega) = 0$ , puis  $S(\omega) = S_{T(\omega)}(\omega)$ .

**II.A** On souhaite démontrer l'égalité  $G_S = G_T \circ G_X$ .

- II.A.1)** Montrer que, si  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{N}$  indépendantes, alors  $G_{X+Y} = G_X G_Y$ .
- II.A.2)** En admettant que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $S_k$  est indépendante de  $X_{k+1}$ , prouver que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $G_{S_k} = (G_X)^k$ .
- II.A.3)** En admettant que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T$  et  $S_n$  sont indépendantes, montrer que

$$\forall t \in [-1, 1], \forall K \in \mathbb{N}, G_S(t) = \sum_{k=0}^K G_X(t)^k \mathbb{P}(T = k) + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n) \mathbb{P}(T = k) t^n \right)$$

- II.A.4)** Pour  $K \in \mathbb{N}$  et  $t \in [0, 1[$ , on pose  $R_K = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n) \mathbb{P}(T = k) t^n \right)$ .

Montrer que  $0 \leq R_K \leq \frac{1}{1-t} \sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(T = k)$ .

- II.A.5)** Conclure.

- II.B** En déduire que, si  $T$  et les  $X_n$  sont d'espérance finie, alors  $S$  aussi et  $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(X_1)$ .
- II.C** Lors d'une ponte, un insecte pond un nombre aléatoire d'œufs suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . Ensuite, la probabilité qu'un œuf donné devienne un nouvel insecte est  $\alpha \in ]0, 1[$ .
  - II.C.1)** Rappeler la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .
  - II.C.2)** En utilisant la relation de composition ci-dessus, déterminer la loi du nombre d'insectes issus de la ponte.

### III] Processus de Galton-Watson

Soit  $\mu$  une loi de probabilité caractérisée par la suite  $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de nombre réels entre 0 et 1 telle que  $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ .

Dire qu'une variable aléatoire  $X$  sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  suit la loi  $\mu$  signifie que  $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$  et, pour tout  $k \in \mathbb{N}$   $\mathbb{P}(X = k) = p_k$ . On suppose que  $p_0 + p_1 < 1$  (ce qui signifie qu'il existe au moins un entier  $k$  supérieur ou égal à 2 tel que  $p_k \neq 0$ ). On étudie un individu qui a un certain nombre de fils. Ces fils ont également chacun (indépendamment les uns des autres) un certain nombre de fils et ainsi de suite. Afin de modéliser la situation, on se donne des variables aléatoires  $(X_{n,i})_{(n,i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$ , indépendantes qui suivent toutes la loi  $\mu$ , on pose  $Y_0$  la variable certaine égale à 1 et, pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $\omega \in \Omega$ ,

$$\begin{cases} Y_{n+1}(\omega) = 0 & \text{si } Y_n(\omega) = 0 \\ Y_{n+1}(\omega) = \sum_{i=1}^{Y_n(\omega)} X_{n,i}(\omega) & \text{si } Y_n(\omega) \neq 0 \end{cases}$$

$Y_n$  représente le nombre d'individus à la génération  $n$ .

S'il n'y a pas d'individu à la génération  $n$ , il n'y en a pas plus à la génération suivante et sinon, le nombre de fils du  $i$ -ème élément de la génération  $n$  est égal à  $X_{n,i}$ .

On dit qu'il y a extinction lorsqu'il existe un entier  $n$  tel que  $Y_n = 0$ .

On note  $f$  la fonction génératrice de la loi  $\mu$  (et donc de chacune des variables  $X_{n,i}$ ) et, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_n$  la fonction génératrice de la variable aléatoire  $Y_n$ .

On a donc en particulier, pour  $t \in [0, 1]$ ,  $\varphi_0(t) = t$ .

On suppose que toute variable aléatoire suivant la loi  $\mu$  possède une espérance égale à  $m$  et une variance.

#### III.A Probabilité d'extinction

- III.A.1)** Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_{n+1} = \varphi_n \circ f$ .
- III.A.2)** Exprimer, pour  $n \in \mathbb{N}$ , l'espérance de  $Y_n$  en fonction de  $m$  et de  $n$ .
- III.A.3)**
  - a) Vérifier que la probabilité d'extinction est égale à la limite de la suite  $(\varphi_n(0))_{n \geq 0}$ .
  - b) Vérifier qu'on peut appliquer les résultats de la partie I à la suite  $(\varphi_n(0))_{n \geq 0}$ .
- III.A.4)** Si  $m \leq 1$ , montrer que la probabilité d'extinction est égale à 1.

On définit alors le temps  $T$  d'extinction par

$$\forall \omega \in \Omega \begin{cases} T(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N} / Y_n(\omega) = 0\} & \text{s'il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } Y_n(\omega) = 0 \\ T(\omega) = -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

On admettra que  $T$  est une variable aléatoire.

#### III.B Cas sous-critique $m < 1$

On suppose dans cette question que  $m < 1$ .

- III.B.1)** Vérifier que  $T$  admet une espérance.
- III.B.2)**
  - a) Montrer que, pour tout entier  $n$ ,  $\mathbb{P}(Y_n \geq 1) \leq m^n$ .

b) Montrer que  $\mathbb{E}(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(T > k)$ .

c) En déduire une majoration de  $\mathbb{E}(T)$ .

### III.C Étude de la lignée

Dans cette question, on suppose  $m \leq 1$ . On note, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$Z_n = 1 + \sum_{i=1}^n Y_i \quad \text{et} \quad Z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n$$

On admettra que  $Z$  est une variable aléatoire définie sur  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} (Y_k = 0)$ .

**III.C.1)** Montrer que  $Z$  est définie sur un ensemble de probabilité 1.

**III.C.2)**

a) Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(\mathbb{P}(Z_n \leq k))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite convergente. Déterminer sa limite.

b) En déduire que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $(\mathbb{P}(Z_n = k))_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $\mathbb{P}(Z = k)$ .

c) Montrer que pour tout  $s \in [0, 1[$ , tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $K \in \mathbb{N}$ ,

$$|G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| \leq \sum_{k=0}^K |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| + \frac{s^K}{1-s}$$

d) En déduire que la suite de fonctions  $(G_{Z_n})$  converge simplement vers  $G_Z$  sur  $[0, 1]$ .

**III.C.3)**

a) Exprimer  $G_{Z_1}$  en fonction de  $f$ .

b) On admet que, pour tout  $n$  entier naturel supérieur ou égal à 2 et pour tout  $s \in [0, 1]$ ,  $G_{Z_n}(s) = sf(G_{Z_{n-1}}(s))$ . En déduire que, pour tout  $s \in [0, 1[$ ,  $G_Z(s) = sf(G_Z(s))$ .

c) Montrer que  $Z$  est d'espérance finie si et seulement si  $m < 1$ . Calculer l'espérance lorsque c'est le cas.

## IV] Un exemple

On suppose dans cette partie que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $p_k = \frac{1}{2^{k+1}}$ .

**IV.A** Exprimer, pour  $t \in [0, 1]$ ,  $f(t)$  et calculer  $m$ .

**IV.B** Vérifier que pour tout  $t \in [0, 1[$ ,  $\varphi_n(t) \neq 1$ . On peut donc poser

$$a_n(t) = \frac{1}{\varphi_n(t) - 1}$$

**IV.C** Montrer que, pour  $t \in [0, 1[$ , la suite  $(a_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmétique.

**IV.D** En déduire que, pour  $t \in [0, 1[$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varphi_n(t) = \frac{n+(1-n)t}{1+n-nt}$ .

**IV.E** Exprimer, pour  $n, k \in \mathbb{N}$   $\mathbb{P}(Y_n = k)$  en fonction de  $n$  et  $k$ .

**IV.F** Exprimer, en fonction de  $n \in \mathbb{N}^*$ , la probabilité de l'événement  $T > n$ . La variable  $T$  admet-elle une espérance?

**IV.G** Exprimer, pour  $s \in [0, 1[$ ,  $G_Z(s)$  en fonction de  $s$ . En déduire la loi de  $Z$ .

## V] Cas surcritique

On suppose dans cette partie  $m > 1$ .

On étudie un problème légèrement différent :  $k$  étant un entier strictement positif fixé, on suppose qu'il y a  $k$  individus à la génération 0 ; ensuite tout se passe comme précédemment.

On note  $W_n$  le nombre d'individus à la  $n$ -ième génération et on définit  $u_n$  la probabilité que la suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  prenne la valeur  $k$  pour la première fois au rang  $n$  :

$$u_n = \mathbb{P} \left( (W_n = k) \cap \left( \bigcap_{i=1}^{n-1} (W_i \neq k) \right) \right)$$

Pour  $n$  et  $r$  entiers naturels non nuls, on définit de même  $u_n^{(r)}$  comme la probabilité pour que la suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  prenne la valeur  $k$  pour la  $r$ -ième fois au rang  $n$ .

**V.A** Vérifier que les séries  $\sum_{n \geq 1} u_n s^n$  et  $\sum_{n \geq 1} u_n^{(r)} s^n$  convergent quand  $s \in [-1, 1]$ . On peut donc définir pour  $s \in$

$[-1, 1]$ ,

$$U(s) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n s^n \quad \text{et} \quad U_r(s) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{(r)} s^n$$

**V.B**

**V.B.1)** Montrer que  $\mathbb{P}(W_1 > k) > 0$ .

**V.B.2)** Montrer que la probabilité que la suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne prenne pas la valeur  $k$  est non nulle; on note  $u$  cette probabilité.

*On pourra étudier séparément les cas  $p_0 = 0$  et  $p_0 > 0$ .*

**V.C**

**V.C.1)** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $r$  un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer la relation

$$u_n^{(r)} = \sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{n-i}^{(r-1)}$$

**V.C.2)** En déduire que, pour tout entier  $r$  strictement positif,  $U_r = U^r$  ( $U^r = U \times \dots \times U$ ,  $r$  fois).

**V.D**

**V.D.1)** Montrer que la probabilité que la suite  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  prenne la valeur  $k$  une infinité de fois est nulle.

**V.D.2)** Montrer qu'il en est de même pour la suite  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

**V.E** Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'évènements tous de probabilité 1. Montrer que  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = 0$ . Qu'en déduit-on

pour  $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$ ?

**V.F** Soit  $\alpha$  la probabilité qu'il y ait extinction et  $\beta$  la probabilité que la suite  $(Y_n)$  diverge vers l'infini. Montrer que  $\alpha + \beta = 1$ .