DS 8⋆ : samedi 23 mars

Correction

Exercice 1 *Formule de Wald, Processus de Galton-Watson* (CENTRALE PSI 2015 *Maths 1*).

I] Étude d'une suite récurrente

Correction :

I.A

I.A.1) Comme f' est croissante, on en déduit que (u_n) est monotone, de plus on a $u_1 = f(u_0) \geq 0 = u_0$, ainsi (u_n) est croissante. On a aussi (u_n) majorée par 1 (car $[0,1]$ stable par f), on en déduit donc que (u_n) est convergente.

I.A.2) L'ensemble $A = \{x \in [0,1] \,/\, f(x) = x\}$ est partie non vide (1 est dedans) de $\mathbb{R}$, donc possède une borne inférieur qu'on note x_f. Comme A est un fermé (image réciproque de $\{0\}$ par l'application continue $x \mapsto f(x) - x$), la borne inférieur est en fait un minimum, ainsi x_f est un point fixe de A, et c'est bien le plus petit.

I.A.3) On a $0 \leq x_f$ et comme f est croissante, $f(0) \leq x_f$, ainsi $[0, x_f]$ est stable par f, et comme $u_0 = 0 \in [0, x_f]$, on en déduit que (u_n) est à valeur dans $[0, x_f]$, sa limite est donc aussi dans $[0, x_f]$, or f est continue donc $f(\ell) = \ell$ et donc ℓ est un point fixe de f plus petit que x_f, on a donc $\ell = x_f$ par minimalité de x_f.

I.B Un dessin rend le résultat assez claire (en 0 on est au dessus de la première bissectrice, on a $f(1) = 1$ et on dessine la tangente au point d'abscisse 1 de f et on a que la courbe est en dessous de la première bissectrice au voisinage de 1, donc la coupe d'après le TVI), montrons le proprement.
On réutilise $g : x \mapsto f(x) - x$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, on a $g'(x) = f'(x) - 1$, donc $g'(1) = m - 1 > 0$, ainsi g' est strictement positive au voisinage de 1, disons sur $[a,1]$ (avec $a < 1$), on a donc $g(a) < g(1) = 0$, or $g(0) = f(0) \geq 0$, donc, comme g est continue, le théorème des valeurs intermédiaires donne l'existence d'un $b \in [0,a]$ tel que $g(b) = 0$, b est un point fixe de f donc $x_f \leq b$, comme $b \leq a < 1$ on en déduit donc que dans le cas où $m > 1$ on a $x_f \in [0,1[$.

I.C On considère encore g, on a $g'' = f''$ est continue et à valeurs positive, comme $g''(1) = f''(1) > 0$ il existe $a < 1$ tel que g'' est strictement positive sur $[a,1]$, ainsi g' est croissante sur $[0,1]$ et est strictement croissante sur $[a,1]$, or $g'(1) = m - 1 \leq 0$, la stricte croissante de g' sur $[a,1]$ donne pour tout $x \in [a,1[$, $g'(x) < 0$ et la croissance de g' donne alors que g' est strictement négative sur $[0,1[$, ainsi g est strictement décroissante sur $[0,1]$ (continuité en 1), ainsi pour tout $x \in [0,1[$, $g(x) > g(1) = 0$, et donc $f(x) > x$, ce qui montre bien que 1 est l'unique point fixe de f sur $[0,1]$ et donc $x_f = 1$.
Comme f est croissante, s'il existait a tel que $f(a) = 1$, comme $f(1) = 1$, on aurait f constante égale à 1 sur $[a,1]$ et donc $f' = 0$ au voisinage de 1, ce qui est absurde (car on aurait $f'' = 0$ au voisinage de 1) , ainsi 1 est l'unique antécédent de 1. S'il existait $n \in \mathbb{N}$, tel que $u_n = 1$, comme $u_n = f(u_{n-1})$, on aurait $u_{n-1} = 1$, et donc par récurrence (descendante) directe on aurait $u_0 = 1$ ce qui est absurde, ainsi on a $u_n \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I.D

I.D.1) On remarque que $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, de plus, d'après la formule de Taylor-Young appliquée à f (qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$) en 1, on a : $f(1+h) = f(1) + hf'(1) + \frac{h^2}{2}f''(1) + \underset{h\to 0}{o}(h^2)$. Ainsi, avec $h = -\varepsilon_n$, on a $f(1-\varepsilon_n) = 1 - \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2}{2}f''(1) + \underset{h\to 0}{o}(\varepsilon_n^2)$, or $f(1-\varepsilon_n) = f(u_n) = u_{n+1} = 1 - \varepsilon_{n+1}$.
On en déduit donc que $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n - \frac{\varepsilon_n^2}{2}f''(1) + \underset{h\to 0}{o}(\varepsilon_n^2) = \varepsilon_n\left(1 - \frac{\varepsilon_n}{2}f''(1) + \underset{h\to 0}{o}(\varepsilon_n)\right)$. Comme la suite (ε_n) ne s'annule pas d'après **I.B**, on a : $\frac{1}{\varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{\varepsilon_n}\frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_n}{2}f''(1) + \underset{h\to 0}{o}(\varepsilon_n)} = \frac{1}{\varepsilon_n}\left(1 + \frac{\varepsilon_n}{2}f''(1) + \underset{h\to 0}{o}(\varepsilon_n)\right) = \frac{1}{\varepsilon_n} + \frac{f''(1)}{2} + \underset{h\to 0}{o}(1)$. Ce qui montre bien que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_{n+1}} - \dfrac{1}{\varepsilon_n}\right) = \dfrac{f''(1)}{2}$.

I.D.2 D'après le lemme de Césaro on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\varepsilon_{k+1}}-\frac{1}{\varepsilon_k}=\frac{f''(1)}{2}$, comme la somme est télescopique on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\varepsilon_n}-\frac{1}{n\varepsilon_0}=\frac{f''(1)}{2}$, comme $\frac{1}{n\varepsilon_0}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n\varepsilon_n}=\frac{f''(1)}{2}$, ie $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}n\varepsilon_n=\frac{2}{f''(1)}$, ie $\varepsilon_n=1-u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{nf''(1)}$.

I.E I.E.1) Le même développement limité qu'en **I.D.1)** donne $\varepsilon_{n+1}=\varepsilon_n\left(m-\frac{\varepsilon_n}{2}f''(1)+\underset{h\to0}{o}(\varepsilon_n)\right)$. Ainsi $\displaystyle\left|\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n}\right|=\left|m-\frac{\varepsilon_n}{2}f''(1)+\underset{h\to0}{o}(\varepsilon_n))\right|\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}|m|<1$, ainsi le critère de d'Alembert permet d'obtenir la convergence absolue de $\sum\varepsilon_n$.

On a : $\displaystyle\ln\left(\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n}\right)=\ln\left(\frac{\varepsilon_{n+1}}{m\varepsilon_n}\right)=\ln\left(1-\frac{\varepsilon_n}{2m}f''(1)+\underset{h\to0}{o}(\varepsilon_n)\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{\varepsilon_n}{2m}f''(1)$ qui est le terme général d'une série absolument convergente, ainsi $\displaystyle\sum\ln\left(\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n}\right)$ converge.

I.E.2) On remarque que $\ln\left(\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n}\right)=\ln\left(m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}\right)-\ln\left(m^{-n}\varepsilon_n\right)$, et donc la série (télescopique) $\displaystyle\sum\ln\left(\frac{m^{-(n+1)}\varepsilon_{n+1}}{m^{-n}\varepsilon_n}\right)$ est de même nature que la suite $\left(\ln\left(m^{-n}\varepsilon_n\right)\right)_n$ donc convergente, ainsi il existe $d\in\mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\ln\left(m^{-n}\varepsilon_n\right)=d$, ie $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}m^{-n}\varepsilon_n=\mathrm{e}^d>0$, ce qui montre bien, en posant $c=\mathrm{e}^d$, que $\varepsilon_n=1-u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}cm^n$.

II] Formule de Wald

Correction :

II.A

II.A.1) Soit $k\in\mathbb{N}$, d'après la formule des probabilités totales (FPT) appliquée à l'évènement $(X+Y=k)$ et au système complet d'avènements (SCE) $(Y=\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$, on a $\displaystyle\mathbb{P}(X+Y=k)=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=\ell)\mathbb{P}_{(Y=\ell)}(X+Y=k)=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=\ell)\mathbb{P}_{(Y=\ell)}(X=k-\ell)$, comme X et Y sont indépendantes on a $\displaystyle\mathbb{P}(X+Y=k)=\sum_{\ell=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Y=\ell)(X=k-\ell)$, ainsi G_{X+Y} est le produit de Cauchy de G_X et de G_Y (on a bien convergence absolue des séries sur au moins $]-1,1[)$, ainsi $G_{X+Y}=G_XG_Y$.

Alternative : Soit $t\in]-1,1[$, on définit $f:x\mapsto t^x$, comme X et Y sont indépendantes, il en va de même pour $f(X)$ et $f(Y)$, on a donc $\mathbb{E}(f(X)f(Y))=\mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(f(Y))$, ie $\mathbb{E}(t^{X+Y})=\mathbb{E}(t^X)\mathbb{E}(t^Y)$, ie $G_{X+Y}=G_XG_Y$.

II.A.2) Procédons par récurrence. Comme $S_1=X_1$ on a bien $G_{S_1}=(G_X)^1$, la propriété est ainsi initialisée, supposons qu'il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $G_{S_k}=(G_X)^k$, comme S_{k+1} est indépendante de X_{k+1}, la question précédente donne $G_{S_k+X_{k+1}}=(G_X)^kG_{X_{k+1}}$, comme $S_{k+1}=S_k+X_{k+1}$ et $G_{X_{k+1}}=G_X$, on a bien $G_{S_{k+1}}=(G_X)^{k+1}$ et la propriété est bien héréditaire. On a bien montré que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $G_{S_k}=(G_X)^k$.

II.A.3) Soit $t\in[0,1[$ et $K\in\mathbb{N}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$, en appliquant la FPT à l'évènement $(S=n)$ avec le SCE $(T=k)_{k\in\mathbb{N}}$ on a $\displaystyle\mathbb{P}(S=n)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(S=n,T=k)$, ainsi pour tout $t\in]-1,1[$, on a : $\displaystyle G_s(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\mathbb{P}(S=n,T=k)\right)t^n$. Comme S et T sont indépendantes, on a $\displaystyle G_s(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\mathbb{P}(S=n)\mathbb{P}(T=k)\right)t^n$.

On a donc $\displaystyle G_s(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{K}\left(\mathbb{P}(S=n)\mathbb{P}(T=k)\right)t^n+\sum_{k=K+1}^{+\infty}\left(\mathbb{P}(S=n)\mathbb{P}(T=k)\right)t^n\right)$, coupons la somme en deux, pour cela on va justifier la convergence de la première somme. Soit $N\in\mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{K}\left(\mathbb{P}(S=n)\mathbb{P}(T=k)\right)t^n=\sum_{k=0}^{K}\left(\sum_{n=0}^{N}\left(\mathbb{P}(S=n)t^n\right)\mathbb{P}(T=k)\right)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}\sum_{k=0}^{K}G_S(t)\mathbb{P}(T=k)=$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{K}(G_X(t))^k\mathbb{P}(T=k)$ (d'après la question précédente).

Ceci montre non seulement qu'on peut couper la somme, mais aussi le résultat escompté : $G_S(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{K} G_X(t)^k\mathbb{P}(T=k) + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=K+1}^{\infty}\mathbb{P}(S_k=n)\mathbb{P}(T=k)t^n\right)$.

II.A.4) Soit $K\in\mathbb{N}$ et $t\in[0,1[$, pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $0\leq \mathbb{P}(S_k=n)\mathbb{P}(T=k)t^n\leq \mathbb{P}(T=k)t^n$, comme $\sum\mathbb{P}(T=k)t^n$ converge, on peut sommer cette inégalité pour k allant de $K+1$ à $+\infty$ et on trouve : $0\leq \displaystyle\sum_{k=K+1}^{\infty}\mathbb{P}(S_k=n)\mathbb{P}(T=k)t^n \leq \sum_{k=K+1}^{+\infty}\mathbb{P}(T=k)t^n$. Il ne reste plus qu'à sommer pour n allant de 0 à $+\infty$ (possible car les séries convergent et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}t^n=\frac{1}{1-t}$. On a donc bien que : $0\leq R_K\leq \dfrac{1}{1-t}\displaystyle\sum_{k=K+1}^{\infty}\mathbb{P}(T=k)$.

II.A.5) De la question précédente on a : $\displaystyle\lim_{K\to+\infty}R_k=0$, ainsi en faisant tendre K vers $+\infty$ dans **II.A.3)** on a $G_S(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}G_X(t)^k\mathbb{P}(T=k)=G_T(G_X(t))=G_T\circ G_X(t)$. Ce qui montre bien que $G_S=G_T\circ G_X$.

II.B Comme T est d'espérance finie alors G_T est dérivable en 1, comme G_X est dérivable en 1 et comme $G_X(1)=1$, on en déduit que G_S est dérivable en 1, et donc que S est d'espérance finie et aussi que $\mathbb{E}(S)=G_S'(1)=G_X'(1)G_T'(G_X(1))=\mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(T)$.

II.C

II.C.1) Si T suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$, alors sa loi est donnée pour tout $k\in\mathbb{N}$, par $\mathbb{P}(T=k)=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$, et sa série génératrice, pour tout $t\in\mathbb{R}$, par $G_T(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}t^k=\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t}$.

II.C.2) Ici on a X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre α, T comme à la question précédente, ainsi, en notant S le nombre d'insectes issus de la ponte, on a (d'après ce qui précède les indépendances demandées sont vérifiées, ou tout du moins on en fait la supposition) : $G_S=G_T\circ G_X$, ainsi pour tout $t\in[0,1[$, $G_S(t)=G_T(1-\alpha+\alpha t)=\mathrm{e}^{-\lambda+\lambda(1-\alpha+\alpha t)}=\mathrm{e}^{-\alpha\lambda}\mathrm{e}^{\alpha\lambda t)}$. Ainsi S suit la loi de Poisson de paramètre $\alpha\lambda$.

III] Processus de Galton-Watson

Correction :

III.A III.A.1) À $n\in\mathbb{N}$ fixé on est dans le cadre de la partie **II.A** avec $T=Y_n$, pour tout i, $X_i=X_{n,i}$ et $S=Y_{n+1}$, les hypothèses d'indépendances étant vérifiées, on a $G_{Y_{n+1}}=G_{Y_n}\circ G_{X_{n,1}}$, ie $\varphi_{n+1}=\varphi_n\circ f$. On peut aussi remarquer que, comme $\varphi_0=\mathrm{Id}$, par récurrence directe on obtient, pour tout $n\in\mathbb{N}$, que $\varphi_n=f\circ\ldots\circ f$, ainsi on a aussi $\varphi_{n+1}=f\circ\varphi_n$.

III.A.2) En faisant comme en **II.B**, on a $\mathbb{E}(Y_{n+1})=\mathbb{E}(Y_n)\mathbb{E}(X_{n,1})=\mathbb{E}(Y_n)m$, ainsi $(\mathbb{E}(Y_n))_n$ est une suite géométrique de raison m, on en déduit donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, que $\mathbb{E}(Y_n)=m^n\mathbb{E}(Y_0)=m^n$.

III.A.3)

a) La probabilité d'extinction n'est rien d'autre que $E=\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty}(Y_n=0)$. Or la suite $(Y_n=0)_n$ est décroissante (car s'il n'y a plus d'individus à la génération n alors il n'y en a plus à la génération $n+1$, ie $(Y_n=0)\subset(Y_{n+1}=0)$), et comme $\mathbb{P}(Y_n=0)=G_{Y_n}(0)=\varphi_n(0)$. Ainsi par continuité croissante on a bien que la probabilité d'extinction est égale a la limite de la suite $(\varphi_n(0))_{n\geq 0}$.

b) La fonction f est la fonction génératrice de la loi μ qui admet une espérance et une variance, ainsi f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$. De plus $f(1)=1$, $f'(1)=m$, $f'(0)=p_1<1$, et $f''(1)=\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)p_k>0$ puisqu'il existe $k\geq 2$ tel que $p_k>0$.

On Pose $u_0=\varphi_0(0)=0$, et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)=\varphi_{n+1}(0)$ (d'après **III.A.1)**).

Ainsi on peut appliquer les résultats de la partie **I** à la suite $(\varphi_n(0))_{n\geq 0}$.

III.A.4) D'après **I.C**, si $m\leq 1$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(0)=1$, ainsi la probabilité d'extinction est égale à 1.

III.B

III.B.1) Pour tout $k\in\mathbb{N}^\star$, si $T=k$ alors il y avait encore des individus à la génération $k-1$ par définition de T, ie $(T=k)\subset(Y_{k-1}\geq 1)$, on en déduit donc que $\mathbb{P}(T=k)\leq\mathbb{P}(Y_{k-1}\geq 1)$. On a donc $k\mathbb{P}(T=k)\leq k\sum_{\ell=1}^{+\infty}\mathbb{P}(Y_{k-1}=\ell)\leq k\sum_{\ell=1}^{+\infty}\ell\mathbb{P}(Y_{k-1}=\ell)$ (car Y_{k-1} admet une espérance), ainsi $k\mathbb{P}(T=k)\leq k\mathbb{E}(Y_{k-1})=km^{k-1}$, or $\sum km^{k-1}$ converge (série géométrique dérivée de raison $m\in[0,1[$), ainsi, par théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum k\mathbb{P}(T=k)$ converge, ie T admet une espérance.

Alternative : $(T=k)\subset(Y_k=0)$ et utiliser l'équivalent de **I.E.2)**

III.B.2)

a) Pour tout entier n, $\mathbb{P}(Y_n\geq 1)=\sum_{\ell=1}^{+\infty}\mathbb{P}(Y_n=\ell)\leq\sum_{\ell=1}^{+\infty}\ell\mathbb{P}(Y_n=\ell)=\mathbb{E}(Y_n)=m^n$.

Alternative : Y_n est une vard positive admettant une espérance, donc l'inégalité de Markov s'applique, ainsi $\mathbb{P}(Y_n\geq 1)\leq\frac{\mathbb{E}(Y_n)}{1}=m^n$.

b) On a $\mathbb{P}(T=-1)=0$, ainsi $\mathbb{E}(T)=\sum_{k=0}^{+\infty}k\mathbb{P}(T=k)=\sum_{k=0}^{+\infty}k\left(\mathbb{P}(T>k-1)-\mathbb{P}(T>k)\right)$.

Fixons $K\geq 0$. On a : $\sum_{k=0}^{K}k\left(\mathbb{P}(T>k-1)-\mathbb{P}(T>k)\right)=\sum_{k=1}^{K}k\mathbb{P}(T>k-1)-\sum_{k=0}^{K}k\mathbb{P}(T>k)=\sum_{k=0}^{K-1}(k+1)\mathbb{P}(T>k)-\sum_{k=0}^{K}k\mathbb{P}(T>k)=\sum_{k=0}^{K-1}k\mathbb{P}(T>k)-K\mathbb{P}(T>K)$.

Or $(T>K)\subset(Y_K>0)$, ainsi la question **II.B.2.a)** donne $0\leq K\mathbb{P}(T>K)\leq Km^K\underset{K\to+\infty}{\longrightarrow}0$, en faisant tendre K vers $+\infty$, on en déduit donc que $\mathbb{E}(T)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(T>k)$.

c) En utilisant encore que pour tout $k\geq 1$, $(T>k)\subset(Y_k\geq 1)$, on a $\mathbb{E}(T)=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(T>k)\leq\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(Y_k\geq 1)\leq\sum_{k=0}^{\infty}m^k=\frac{1}{1-m}$.

III.C

III.C.1) L'évènement $\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(Y_k=0)$ est l'évènement d'extinction déjà traité à la question **III.A.4**, sa probabilité vaut bien 1.

III.C.2)

a) Tout d'abord, pour $n\in\mathbb{N}$ on a $Z_{n+1}=Z_n+Y_n\geq Z_n$, ainsi, pour tout $k\in\mathbb{N}^\star$, $(Z_{n+1}\leq k)\subset(Z_n\leq k)$, $(\mathbb{P}(Z_n\leq k))_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est donc décroissante, comme elle est minorée (par 0), elle converge, de plus, par continuité décroissante on a : $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(Z_n\leq k)=\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}(Z_n\leq k)\right)$.

Montrons maintenant que $\bigcap_{n=1}^{+\infty}(Z_n\leq k)=(Z\leq k)$, Soit $\omega\in\bigcap_{n=1}^{+\infty}(Z_n\leq k)$, on a donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $Z_n(\omega)\leq k$, ie $1+\sum_{i=1}^{n}Y_i(\omega)\leq k$, en faisant $n\to+\infty$ on trouve $Z(\omega)\leq k$, ce qui montre $\bigcap_{n=1}^{+\infty}(Z_n\leq k)\subset(Z\leq k)$. Réciproquement si $\omega\in(Z\leq k)$, comme tous les $Y_i(\omega)$ sont positifs, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $Z_n(\omega)\leq Z(\omega)\leq k$. Ce qui montre bien l'autre inclusion.

Au final, on a montré $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(Z_n\leq k)=\mathbb{P}(Z\leq k)$.

b) Soit $k\in\mathbb{N}$. Tout d'abord on remarque que si $k=0$, comme tous les Z_n et Z sont à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$ alors on a bien la limite demandée (la suite nulle tend vers 0). Supposons $k>0$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a (Z_n à valeurs entière) $\mathbb{P}(Z_n=k)=\mathbb{P}(Z_n\leq k)-\mathbb{P}(Z_n\leq k-1)$. Le membre de droite converge d'après la question précédente, ainsi $\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(Z_n=k)=\mathbb{P}(Z\leq k)-\mathbb{P}(Z\leq k-1)=\mathbb{P}(Z=k)$, ce qui est bien le résultat escompté.

c) Soit $s\in[0,1[$, $n\in\mathbb{N}^\star$ et $K\in\mathbb{N}$, on a (on a bien convergence absolue des séries misent en jeux) : $|G_{Z_n}(s)-G_Z(s)|=\left|\sum_{k=0}^{+\infty}(\mathbb{P}(Z_n=k)-\mathbb{P}(Z=k))s^k\right|$, donc (en découpant la somme et en utilisant que pour tout k, $\left|s^k\right|\leq 1$) on a : $|G_{Z_n}(s)-G_Z(s)|\leq\sum_{k=0}^{K}|\mathbb{P}(Z_n=k)-\mathbb{P}(Z=k)|+$

$\displaystyle\sum_{k=K+1}^{+\infty} |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)|\, s^k$. Or pour tout k on a $|\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| \leq 1$ (la différence de deux nombres compris entre 0 et 1 est comprise entre -1 et 1), ainsi $\displaystyle\sum_{k=K+1}^{+\infty} |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)|\, s^k \leq \sum_{k=K+1}^{+\infty} s^k = \frac{s^{K+1}}{1-s} \leq \frac{s^K}{1-s}$.

Ce qui montre bien que $\displaystyle|G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| \leq \sum_{k=0}^{K} |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| + \frac{s^K}{1-s}$.

d) Soit $\varepsilon > 0$, comme $\displaystyle\frac{s^K}{1-s} \underset{K\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, il existe K_0 tel que , pour tout $K \geq K_0$, $\displaystyle\left|\frac{S^K}{1-s}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Fixons maintenant $K = K_0$.

D'après la question **III.C.2.b)** pour tout k il existe N_k tel que pour tout $n \geq N_k$ on a :$\displaystyle|\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| \leq \frac{\varepsilon}{2(K_0+1)}$. Ainsi, en posant $N = \max(N_0, \ldots, N_K)$ (nombre fini de terme) on a, pour tout $n \geq N_K$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{K} |\mathbb{P}(Z_n = k) - \mathbb{P}(Z = k)| \leq \sum_{k=0}^{K} \frac{\varepsilon}{2(K_0+1)} = \frac{\varepsilon}{2}$.

On a donc montré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$: $|G_{Z_n}(s) - G_Z(s)| \leq \varepsilon$, ce qui montre que $(G_{Z_n}(s))_n$ converge vers $G_Z(s)$, ie la convergence simple de la suite de fonctions (G_{Z_n}) vers G_Z sur $[0,1]$.

III.C.3)

a) Pour $s \in [0,1[$, comme $Z_1 = 1 + Y_1$ et comme $Y_1 \geq 0$, on a : $\displaystyle G_{Z_1}(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Z_1 = k)s^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_1 = k-1)s^k = sG_{Y_1}(s) = sf(s)$

b) Le résultat admis, ainsi que la continuité de f et la convergence simple de (G_{Z_n}) vers G_Z donne directement que pour tout $s \in [0,1[$, $G_Z(s) = sf(G_Z(s))$.

c) Tout d'abord, comme μ est d'espérance finie, f est dérivable en 1 et $f'(1) = m$. De plus on rappel que $G_Z(1) = 1$ (et $f(1) = 1$) puisque Z est une variable aléatoire.

Si Z est d'espérance finie alors G_Z est dérivable en 1, la question précédente donne alors $G'_Z(1) = f(G_Z(1)) + 1.G'_Z(1)f'(G_Z(1))$, ie $\mathbb{E}(Z) = 1 + \mathbb{E}(Z)m$ et donc $(1-m)\mathbb{E}(Z) = 1$, on a $m \leq 1$, et cette égalité donne $1 - m \neq 0$, ainsi $m < 1$ et $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{1-m}$.

Réciproquement on suppose $m < 1$. D'après l'égalité de la question précédente, pour tout $s \in [0,1[$, on a $G'_Z(s) = f(G_Z(s)) + sG'_Z(s)f'(G_Z(s))$. On en déduit donc que $(1 - sf'(G_Z(s)))\, G'_Z(s) = f(G_Z(s))$. Or, par continuité des fonctions génératrices en 1 on a $\displaystyle\lim_{s\to1^-} f(G_Z(s)) = f(G_Z(1)) = 1$ et $\displaystyle\lim_{s\to1^-} 1 - sf'(G_Z(s) = 1 - f'(1) = 1 - m$. Ainsi, la fonction G_Z, qui est continue sur $[0,1]$ et qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$ est telle que G'_Z possède une limite finie, qui est $\frac{1}{1-m}$, en 1^-, donc, par théorème G_Z est dérivable en 1 et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$, ainsi Z est d'espérance finie et $\mathbb{E}(Z) = G'_Z(1) = \frac{1}{1-m}$.

On a bien montré Z d'espérance finie si et seulement si $m < 1$ et que dans ce cas $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{1-m}$.

Remarque : J'ai utilisé que G_Z est continue sur $[0,1]$, ce qu'il faut démontrer, tout d'abord, comme Z est une variable aléatoire, G_Z est définie en 1 (et $G_Z(1) = 1$), on pose, pour $s \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $u_n(s) = \mathbb{P}(Z = n)s^n$, on a $|\mathbb{P}(Z = n)s^n| \leq \mathbb{P}(Z = n)$, d'où $\|u_n\|_\infty^{[0,1]} \leq \mathbb{P}(Z = n$, comme $\sum \mathbb{P}(Z = n)$ converge, on en déduit la convergence normale de la série de fonction sur $[0,1]$, comme toutes les fonctions u_n sont continue sur $[0,1]$, il en va de même pour G_Z.

IV] Un exemple

Correction :

IV.A Pour $t \in [0,1]$, on a $\displaystyle f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} t^k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{t}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{t}{2}} = \frac{1}{2-t}$.

Ainsi f est dérivable sur $[0,1]$ (et même sur $]-2,2[$) et, pour $t \in [0,1]$, $f'(t) = \frac{1}{(2-t)^2}$, ainsi $m = f'(1) = 1$.

IV.B Comme f' est positive, f est strictement croissante sur $[0,1]$, comme $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ on en déduit donc que $[0,1[$ est stable par f. Soit $t \in [0,1[$, on a $\varphi_0(t) = t \in [0,1[$, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_{n+1}(t) = f(\varphi_n(t))$ on en déduit (récurrence directe) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n(t) \in [0,1[$, ce qui est bien ce qui était demandé.

IV.C Soit $t \in [0,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a : $a_{n+1}(t) = \frac{1}{f(\varphi_n(t))-1} = \frac{1}{\frac{1}{2-\varphi_n(t)}-1} = \frac{2-\varphi_n(t)}{1-2+\varphi_n(t)}$. Ainsi $a_{n+1}(t) - a_n(t) =$

$\frac{2-\varphi_n(t)}{\varphi_n(t)-1} - \frac{1}{\varphi_n(t)-1} = -1$. Ainsi la suite $(a_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison -1.

IV.D Soit $t \in [0,1[$, on déduit de la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $a_n(t) = a_0(t) - n$, ie $\frac{1}{\varphi_n(t)-1} = \frac{1}{t-1} - n = \frac{1-nt+n}{t-1}$, et donc $\varphi_n(t) = \frac{t-1}{1+n-nt} + 1 = \frac{n+(1-n)t}{1+n-nt}$, qui est bien le résultat escompté.

IV.E Soit $(n,k) \in \mathbb{N}^2$. On a que $\mathbb{P}(Y_n = k)$ est le coefficient devant t^k dans $\varphi_n(t)$.

Pour $n \geq 1$, on a (la première égalité est, par exemple, une division euclidienne des polynômes en t), pour $t \in [0,1[$, $\varphi_n(t) = \dfrac{n-1}{n} + \dfrac{1}{n}\dfrac{1}{1+n-nt} = \dfrac{n-1}{n} + \dfrac{1}{n(1+n)}\dfrac{1}{1-\frac{n}{n+1}t} = \dfrac{n-1}{n} + \dfrac{1}{n(1+n)}\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}t\right)^k$.

On a donc : $\varphi_n(t) = \dfrac{n-1}{n} + \dfrac{1}{n(1+n)} + \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{n^{k-1}}{(n+1)^{k+1}}t^k = \frac{n^2}{n(n+1)} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{n^{k-1}}{(n+1)^{k+1}}t^k = \frac{n}{n+1} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{n^{k-1}}{(n+1)^{k+1}}t^k$.

Pour $n = 0$, on a $Y_0 = 1$ et donc la formule est encore vrai dans ce cas.

IV.F On a que $(T > n) = (Y_n \geq 1)$, ainsi $\mathbb{P}(T > n) = \mathbb{P}(Y_n \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - \dfrac{n}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.

Le calcul de **III.B.2.b)** avec la somme finie marche encore ici, pour $K \geq 0$, on a montré que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{K} k\mathbb{P}(T = k) = \sum_{k=0}^{K-1} k\mathbb{P}(T > k) - K\mathbb{P}(T > K) = \sum_{k=0}^{K-1}\frac{k}{k+1} - \frac{K}{K+1}$. Or $\sum \frac{k}{k+1}$ diverge (terme général équivalent au terme général de la série harmonique) et $\displaystyle\lim_{K\to+\infty} -\frac{K}{K+1} = -1$, on en déduit donc que $\sum k\mathbb{P}(T = k)$ diverge, ainsi T n'est pas d'espérance finie.

IV.G On utilise **III.C.3.b)**, on a, pour tout $s \in [0,1[$, que $G_Z(s) = \frac{s}{2-G_Z(s)}$. Ainsi $-G_Z(s)^2 + 2G_Z(s) - s = 0$, ainsi $G_Z(s)$ (à s fixé) est solution d'une équation de degré 2 de discriminant $4 - 4s$, on a donc $G_Z(s)$ qui vaut $1 \pm \sqrt{1-s}$, comme $G_Z(s) \leq 1$ on en déduit donc que $G_Z(s) = 1 - \sqrt{1-s}$.

Comme $G_Z(s) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Z = k)s^k$, pour déterminer la loi de Z, il suffit de déterminer le développement en série entière de $s \mapsto 1 - \sqrt{1-s}$, cet fonction est développable en série entière sur $]-1,1[$, de plus pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, on a : $\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2}-1)\dots(\dfrac{1}{2}-k+1) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\prod_{i=1}^{k-1}\frac{1}{2} - i = \frac{(-1)^{k-1}}{2^k}\prod_{i=1}^{k-1}2i - 1 = \frac{(-1)^{k-1}}{2^k}\frac{(2k-2)!}{2^{k-1}(k-1)!}$.

Ainsi, pour $s \in]-1,1[$, $1 - \sqrt{1-s} = -\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{k!2^{2k-1}(k-1)!}(-1)^k s^k = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}k!(k-1)!}s^k$.

Ce qui montre que $\mathbb{P}(Z = 0) = 0$, et, pour tout $k \geq 1$, que $\mathbb{P}(Z = k) = \dfrac{(2k-2)!}{2^{2k-1}k!(k-1)!}$.

V] Cas surcritique

Correction :

V.A Notons $A_n^{(r)}$ l'évènement « W_n vaut k pour la r-ième fois », ainsi $u_n^{(r)} = \mathbb{P}(A_n^{(r)}$, de plus on remarque que $u_n = u_n^{(r)}$. Comme, à r fixé, tous les évènement $A_n(r)$ sont incompatible alors $\sum u_n^{(r)}$ converge, donc le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n^{(r)}s^n$ est plus grand que 1, on a donc la convergence pour $s \in [-1,1]$ (convergence absolue en -1 puisque les probas sont positives).

V.B

V.B.1) On a $W_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_{0,i}$ (car W_0 vaut k), si tous les $X_{0,i}$ était plus grand que strictement que 1 on aurait W_1 strictement plus grand que k, ie $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k}(X_{0,i} > 1) \subset (W_1 > k)$, donc $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k}(X_{0,i} > 1)\right) \leq \mathbb{P}(W_1 > k)$, or les $X_{0,i}$ sont indépendants et $\mathbb{P}(X_{0,i} > 1) = 1 - p_0 - p_1$, ainsi $\mathbb{P}(W_1 > k) \geq (1 - p_0 - p_1)^k > 0$ (puisque $p_0 + p_1 < 1$).

V.B.2) On veut montrer $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star}(W_n \neq k)\right) > 0$.

— Cas $p_0 = 0$.
Dans ce cas tous les évènement $(X_{n,i} \geq 1)$ sont certains, soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $\omega \in \Omega$, on a $W_{n+1}(\omega) = \displaystyle\sum_{i=1}^{W_n(\omega)} X_{n,i}(\omega) \geq W_n(\omega)$, ainsi $(W_n > k) \subset (W_{n+1} > k)$, donc par récurrence directe on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, que $(W_1 > k) \subset (W_n > k)$ et comme $(W_n > k) \subset (W_n \neq k)$, on en déduit donc $(W_1 > k) \subset \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star} (W_n \neq k)$, ainsi $0 < \mathbb{P}(W_1 > k) \leq \mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star} (W_n \neq k)\right)$, qui est le résultat demandé.

— Cas $p_0 > 0$.
Dans ce cas la l'évènement $\displaystyle\bigcap_{i=0}^{k}(X_{0,i} = 0)$ est de probabilité $p_0^k > 0$ et est inclus dans $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star}(W_n \neq k)$ (car si $\omega \in \bigcap_{i=0}^{k}(X_{0,i} = 0)$ alors $W_1(\omega) = 0$ et donc par suite on a $W_n(\omega) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$), ainsi $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star} (W_n \neq k)\right) \geq p_0^k > 0$.

V.C

V.C.1) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $r \geq 2$.
On note $A_{i,n}^{(r)}$ l'évènement « W_i vaut k pour la première foi et W_n vaut k pour la r-ième fois ».
Soit $\omega \in A_n^{(r)}$, ainsi on a $W_n(\omega) = k$ et on note i le plus petit entier positif tel que $W_i(\omega) = k$, comme il doit il avoir $r-1$ valeurs de j tel que $W_j(\omega) = k$ on a i compris entre 1 et $n-r+1$. Ceci montre $A_n^{(r)} = \bigcup A_{i,n}^{(r)}$, de plus cette réunion est disjointe, on a donc $u_n^{(r)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-r+1} \mathbb{P}(A_{i,n}^{(r)})$. Or $\mathbb{P}(A_{i,n}^{(r)}) = u_i u_{n-i}^{(r-1)}$, en effet quand on arrive à la i-ième génération avec une population de k, c'est comme si on reprenait l'expérience à partir de là, et indépendamment de ce qui s'est passé avant. Comme de plus $u_{n-i}^{(r-1)} = 0$ si $i > n-r+1$, on en déduit que $u_n^{(r)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} u_i u_{n-i}^{(r-1)}$.

V.C.2) On pose, pour tout $r \geq 1$, $u_0^{(r)} = 0$ (et $u_0 = 0$), ainsi l'égalité de la question précédente s'écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et $r \geq 2$: $u_n^{(r)} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i u_{n-i}^{(r-1)}$. Ainsi, comme ces séries entières ont toutes un rayon de convergence supérieur où égal à 1, on a que U_n^r est le produit de Cauchy de U et de U_{r-1}, ainsi pour tout $s \in]-1,1[$, on a $U_r(s) = U(s)U_{r-1}(s)$, donc par récurrence directe, pour tout $r \geq 1$, on a $U_r = U^r$ (l'égalité reste vrai en ± 1).

V.D

V.D.1) Notons B l'évènement « W_n prend une infinité de fois la valeur k », et pour tout r notons B_r l'évènement « W_n prend la valeur k au moins r fois », de tel sorte à ce que $B = \displaystyle\bigcap_{r\in\mathbb{N}^\star} B_r$.
La suite $(B_r)_r$ est une suite décroissante, ainsi par continuité décroissante $\mathbb{P}(B) = \displaystyle\lim_{r\to+\infty} \mathbb{P}(B_r)$.
On a $B_r = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star} A_n^{(r)}$, comme les évènements $A_n^{(r)}$ sont deux à deux incompatibles, on en déduit que $\mathbb{P}(B_r) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n^{(r)} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^{(r)} = U_r(1) = U(1)^r = (1-u)^r$ puisque $U(1)$ est la probabilité que W_n prenne la valeur k au moins une fois. Ainsi $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \mathbb{P}(B_r) = 0$ puisque $1 - u \in [0,1[$ d'après **V.B.2**.
On a bien montré que la probabilité que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ prenne la valeur k une infinité de fois est nulle.

V.D.2) Notons C l'évènement « Y_n prend une infinité de fois la valeur k ».
Soit D_i l'évènement « Y_i prend la valeur k pour la première fois » et D_0 l'évènement « Y_i ne prend jamais la valeur k ».
La famille $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un SCE, ainsi la FPT appliquée à l'évènement C donne : $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(D_0 \cap C) + \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(D_i \cap C) = 0 + \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(D_i)\mathbb{P}_{D_i}(C)$, sauf que à partir du moment où $Y_i = k$ c'est comme si on faisait l'expérience de cette partie, ainsi, d'après la question précédente, $\mathbb{P}_{D_i}(C) = 0$, ainsi $\mathbb{P}(C) = 0$.

V.E Par continuité croissante appliquée à $\left(\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} \overline{A_k}\right)_n$ on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} \overline{A_k}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} \overline{A_k}\right)$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} \overline{A_k}\right) \leq \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(\overline{A_k}) = 0$ et donc $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} \overline{A_k}\right) = 0$.

On a que $\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}$. Ainsi $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}\right) = 1$.

V.F Tout d'abord traduisons l'évènement E : « (Y_n) diverge vers l'infini » (ainsi $\mathbb{P}(E) = \beta$), pour $\omega \in E$ on a $\lim_{n\to+\infty} Y_n(\omega) = +\infty$, ainsi pour tout entier k on a $Y_n(\omega) > k$ à partir d'un certain rang, ainsi aucune valeur k ne peut être prise une infinité de fois, ce qui montre que $E \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{C_k}$ (où on a noté C_k l'évènement « Y_n prend une infinité de fois la valeur k », c'est le C de **V.D.2**). Réciproquement si $\omega \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{C_k}$ alors pour tout $L \in \mathbb{N}$, les valeurs $0, 1, \ldots, L-1$ sont prisent un nombre fini de fois, il existe donc un rang N à partir duquel aucune de ces valeurs n'est prise, ie pour tout $n \geq N$ on a $Y_n(\omega) \geq L$, ce qui montre $\lim_{n\to+\infty} Y_n(\omega) = +\infty$ et donc l'autre inclusion, on a donc montré $E = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{C_k}$.

D'après la question V.D.2, tous les évènements $\overline{C_k}$, pour $k \geq 1$, sont de probabilité 1, tandis que l'évènement $\overline{C_0}$ correspond en fait à « Y_n ne prend jamais la valeurs 0 » (car si Y_n vaut 0 alors tous les suivants aussi), ainsi $\mathbb{P}(\overline{C_0}) = 1 - \alpha$.

On a ainsi : $\beta = \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \overline{C_k}\right) = \mathbb{P}(\overline{C_0})\mathbb{P}_{\overline{C_0}}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^\star} \overline{C_k}\right)$. Comme pour tout $k \geq 1$, $\mathbb{P}_{\overline{C_0}}(\overline{C_k}) = 1$, la question **V.E** appliqué à ces évènements et à la probabilité $\mathbb{P}_{\overline{C_0}}$ donne $\mathbb{P}_{\overline{C_0}}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^\star} \overline{C_k}\right) = 1$. On a donc $\beta = 1 - \alpha$, ie $\alpha + \beta = 1$.