DS 1 : samedi 7 septembre

2h sans calculatrice

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats, il numérotera aussi ses pages.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1.

1° Donner la formule du binôme de Newton.

2° Donner, pour $(a,b) \in \mathbb{C}^2$, la factorisation (en deux facteurs) de $a^2 - b^2$ et de $a^3 - b^3$.

3° (a) Donner le domaine de définition et de dérivabilité de $f : x \mapsto \ln(1 - x^2)$ et donner f'

(b) Donner la dérivée de tan et de arctan en précisant les domaines de dérivabilité.

(c) Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Donner la dérivée de la fonction $g : x \mapsto (u(x))^n$.

(d) Donner le domaine de définition et de dérivabilité de $h : x \mapsto \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$ et donner h'.

4° Justifier l'existence et calculer : $S = \displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3^n}{2^{2n}}$ et $T = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

Exercice 2.

5° Énoncer les formules donnant $\cos(a+b)$, $\sin(a+b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$. En déduire la formule donnant $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.

6° Donner le DL_3 en 0 de $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et le DL_2 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1+x}$.

7° Calculer le développement limité de $x \mapsto \ln(1 + \sin(x))$ et de $x \mapsto \ln(1 + \cos(x))$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

8° Résoudre dans $\mathbb{R}$:
$(E_0) \quad y' + \dfrac{2x}{1+x^2} y = 0$; $(E) \quad y' + \dfrac{2x}{1+x^2} y = 6x$; $(F) \quad y'' - 3y' + 2y = 0$ et $(G) \quad y'' + y' + y = 0$.

9° Soit $a \in]0,2]$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n+2}$.

(a) Montrer que la suite est bien définie et qu'elle est à valeurs dans $]0,2]$.

(b) Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite à préciser.

(c) Quid si $a > 2$?

10° (a) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

(b) Application : si $f : [0,1] \to [0,1]$ est une fonction continue, alors f possède au moins un point fixe sur $[0,1]$, c'est-à-dire : $\exists x_0 \in [0,1] \,/\, f(x_0) = x_0$.

(c) On considère $g : x \mapsto \sqrt{1 - x^3/2} - x$, écrire un script `Python` fournissant, par la méthode de dichotomie, une valeur approchée au dix-millième d'un zéro de g sur l'intervalle $[0,1]$.

11° Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ et de $g : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$.

12° Déterminer une primitive de $x \mapsto x\mathrm{e}^{2x}$ (on posera $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x t\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t$ et on effectuera une IPP).

13° Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x + y + z = 0\}$.
Démontrer que V est un sous-espace vectoriel de E. Donner sa dimension.
Soit $W = \{(\alpha,\alpha,\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que W est un sous-espace vectoriel de E. En donner une base.
Démontrer que $E = V \oplus W$.

14° Inverser la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 3.

15° Linéariser $\sin^5(\theta)$.

16° Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^\star, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \mathrm{sg}(x)\frac{\pi}{2}$, où $\mathrm{sg}(x)$ désigne le signe de x.

17° On note X le résultat du lancer d'un dé truqué à 6 faces tel que la probabilité de chacune des face est proportionnelle à son numéro. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance.

18° Donner la matrice de $s(x,y) = \left(\frac{-x-2y}{3}, \frac{-4x+y}{3}\right)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et dans la base $((1,-2),(1,1))$.