DS 1 : samedi 7 septembre

2h sans calculatrice

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats, il numérotera aussi ses pages.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1.

1° Donner la formule du binôme de Newton.

2° Donner, pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, la factorisation (en deux facteurs) de $a^2 - b^2$ et de $a^3 - b^3$.

3° (a) Donner le domaine de définition et de dérivabilité de $f : x \mapsto \ln(1 - x^2)$ et donner f'

(b) Donner la dérivée de tan et de arctan en précisant les domaines de dérivabilité.

(c) Soit u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Donner la dérivée de la fonction $g : x \mapsto (u(x))^n$.

(d) Donner le domaine de définition et de dérivabilité de $h : x \mapsto \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$ et donner h'.

4° Justifier l'existence et calculer : $S = \displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3^n}{2^{2n}}$ et $T = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

Correction :

1° Pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $(a + b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

2° $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ et $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

3° (a) La fonction f est définie sur $[-1, 1]$ et y est dérivable, pour $x \in [-1, 1]$, on a $f'(x) = \frac{-2x}{1-x^2}$.

(b) tan est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et $\tan' = \frac{1}{\cos^2} = 1 + tan^2$.
arctan est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

(c) Pour $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = nu'(x)(u(x))^{n-1}$.

(d) La fonction h est définie pour les $x \in \mathbb{R}$ tels que $-x^2 + 3x - 2 \geq 0$, comme ce polynôme de degré 2 s'annule en 1 et en 2, h est définie sur $[1, 2]$, elle n'est pas définie ailleurs, ainsi $\mathcal{D}_h = [1, 2]$.
La fonction h est dérivable pour les $x \in \mathcal{D}_h$ tels que $-x^2 + 3x - 2 > 0$, elle est donc dérivable sur $]1, 2[$.
Pour $x \in]1, 2[$, on a $h'(x) = \frac{-2x+3}{2\sqrt{-x^2+3x-2}}$

4° Pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{3^n}{2^{2n}} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$, comme $\frac{3}{4} \in]-1, 1[$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{3^n}{2^{2n}}$ converge et sa somme vaut $S = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{3^3}{4^2}$.

Posons, pour $n \geq 1$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)}$. Comme, pour tout $k \geq 1$, on a $\frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$, on en déduit que $T_n = \displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{2(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4}$. Ainsi $\sum \frac{1}{n(n+2)}$ converge et sa somme vaut $T = \frac{3}{4}$.

Exercice 2.

5° Énoncer les formules donnant $\cos(a + b)$, $\sin(a + b)$ en fonction de $\cos(a)$, $\cos(b)$, $\sin(a)$ et $\sin(b)$. En déduire la formule donnant $\tan(a + b)$ en fonction de $\tan(a)$ et $\tan(b)$.

6° Donner le DL_3 en 0 de $x \mapsto \mathrm{e}^x$, $x \mapsto \ln(1 + x)$ et le DL_2 en 0 de $x \mapsto \sqrt{1 + x}$.

7° Calculer le développement limité de $x \mapsto \ln(1 + \sin(x))$ et de $x \mapsto \ln(1 + \cos(x))$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

8° Résoudre dans $\mathbb{R}$:
$(E_0)\quad y' + \dfrac{2x}{1+x^2}y = 0$; $(E)\quad y' + \dfrac{2x}{1+x^2}y = 6x$; $(F)\quad y'' - 3y' + 2y = 0$ et $(G)\quad y'' + y' + y = 0$.

9° Soit $a \in]0,2]$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n+2}$.
(a) Montrer que la suite est bien définie et qu'elle est à valeurs dans $]0,2]$.
(b) Montrer que la suite (u_n) converge vers une limite à préciser.
(c) Quid si $a > 2$?

10° (a) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.
(b) Application : si $f : [0,1] \to [0,1]$ est une fonction continue, alors f possède au moins un point fixe sur $[0,1]$, c'est-à-dire : $\exists x_0 \in [0,1] \,/\, f(x_0) = x_0$.
(c) On considère $g : x \mapsto \sqrt{1 - x^3/2} - x$, écrire un script `Python` fournissant, par la méthode de dichotomie, une valeur approchée au dix-millième d'un zéro de g sur l'intervalle $[0,1]$.

11° Déterminer une primitive de $f : x \mapsto \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ et de $g : x \mapsto \frac{1}{x\ln(x)}$.

12° Déterminer une primitive de $x \mapsto x\mathrm{e}^{2x}$ (on posera $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x t\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t$ et on effectuera une IPP).

13° Soit $E = \mathbb{R}^3$ et $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z = 0\right\}$.
Démontrer que V est un sous-espace vectoriel de E. Donner sa dimension.
Soit $W = \{(\alpha,\alpha,\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$. Démontrer que W est un sous-espace vectoriel de E. En donner une base.
Démontrer que $E = V \oplus W$.

14° Inverser la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Correction :

5° On a $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b$ et $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$.
On en déduit : $\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin a\cos b + \cos a\sin b}{\cos a\cos b - \sin a\sin b} = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a\tan b}$ en divisant numérateur et dénominateur par $\cos a\cos b$.

6° On a : $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(\frac{1}{x^3})$,
$\ln(1+x) = x - \frac{x2}{2} + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}(\frac{1}{x^3})$ et
$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\frac{x^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}(\frac{1}{x^2}) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8!} + \underset{x\to 0}{o}(\frac{1}{x^2})$

7° $\ln(1+\sin(x)) = \ln(1 + x - \frac{x^3}{3!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)) = \left(x - \frac{x^3}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3))$.
$\ln(1+\cos(x)) = \ln(2 - \frac{x^2}{2!} + \underset{x\to 0}{o}(x^3))) = \ln(2) + \ln(1 - \frac{x^2}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^3))) = \ln(2) - \frac{x^2}{4} + \underset{x\to 0}{o}(x^3))$.

8° — (E_0) est une équation différentielle homogène du premier ordre à coefficients continue de la forme $y' + a(x)y = 0$, si on note A une primitive de a, ses solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto C\mathrm{e}^{-A(x)}$ où $C \in \mathbb{R}$. On remarque que $A : x \mapsto \ln(1+x^2)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$, ainsi les solutions de (E_0) sont les $x \mapsto C\mathrm{e}^{-\ln(1+x^2)} = \frac{C}{1+x^2}$.
L'ensemble des solutions de (E_0) est donc $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{C}{1+x^2} \end{array},\ C \in \mathbb{R}\right\}$. Ensemble qu'on peut aussi écrire sous la forme $\mathrm{Vect}(f)$ si on note $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
— (E) est une équation différentielle du premier ordre à coefficients continue, son équation homogène associée n'est rien d'autre que (E_0). Il faut donc déterminer une solution particulière. Pour cela on peut la deviner (c'est le plus rapide) ou utiliser la méthode dite de la variation de la constante, ie qu'on cherche une solution de la forme $y_p : x \mapsto \varphi(x)\frac{1}{1+x^2}$, où φ est une fonction de classe $\mathbb{C}^1$ à déterminer.
Tout d'abord y_p est dérivable et, pour $x \in \mathbb{R}$, $y_p'(x) = \varphi'(x)\frac{1}{1+x^2} + \varphi(x)\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$. On a y_p solution de $(E) \iff y_p' + \frac{2x}{1+x^2}y_p = 6x \iff \varphi'(x)\frac{1}{1+x^2} + \varphi(x)\frac{-2x}{(1+x^2)^2} + \frac{2x}{1+x^2}\varphi(x)\frac{1}{1+x^2} = 6x \iff \varphi'(x)\frac{1}{1+x^2} = 6x \iff \varphi'(x) = 6x + 6x^3$, on remarque que $\varphi(x) = 3x^2 + \frac{3}{2}x^4$ convient, ainsi $y_p : x \mapsto \frac{3x^2 + \frac{3}{2}x^4}{1+x^2}$ est une solution de (E). Ainsi les solutions de (E) sont les $x \mapsto y_p(x) + y_0(x)$ où y_0 est solution de (E_0). L'ensemble des solutions de (E_0) est donc $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{C + 3x^2 + \frac{3}{2}x^4}{1+x^2} \end{array},\ C \in \mathbb{R}\right\}$.
— C'est une équation du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$ qui admet deux racines réelles distinctes : $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$ comme racines. Ainsi l'ensemble des solutions

de (F) est $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & A\mathrm{e}^{x} + B\mathrm{e}^{2x} \end{array}, (A,B) \in \mathbb{C}^2 \right\}$.
Ensemble qu'on peut aussi écrire sous la forme $\mathrm{Vect}(x \mapsto \mathrm{e}^{x}, x \mapsto \mathrm{e}^{2x})$.

— C'est une équation du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est $r^2 + r + 1 = 0$ qui admet deux racines complexes conjuguées : $\frac{-1}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Comme on doit résoudre dans $\mathbb{R}$ on en déduit que les solutions sont les $x \mapsto \mathrm{e}^{-x/2}\left(A\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + B\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ où $(A,B) \in \mathbb{R}^2$.

9° On a affaire à une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : x \mapsto \frac{4x}{x+2}$.

(a) On remarque, pour $x \geq 0$, que (en faisant $+8-8$ au numérateur) : $f(x) = 4 - \frac{8}{x+2}$, ainsi f est croissante (c'est le but de cette remarque initiale, si vous ne le voyez pas il faut faire une rapide étude de fonction). De plus $f(0) = 0$ et $f(2) = 2$, ce qui montre que $]0,2]$ est un intervalle stable par f, ainsi u est bien définie et à valeurs dans $]0,2]$.

(b) Comme f est croissante on en déduit que u est monotone, comme elle est bornée elle est donc convergente vers un certain $\ell \in [0,2]$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - u_n^2 - 2u_n}{u_n+2} = \frac{u_n(2-u_n)}{u_n+2}$, comme $u_n \in]0,2]$ on a donc que (u_n) est croissante, comme f est continue on a que ℓ est un point fixe de f, or $f(\ell) = \ell \iff \ell = 0$ ou $\frac{4}{\ell+2} = 1 \iff \ell = 0$ ou $\ell = 2$, comme $u_0 > 0$ et comme (u_n) est croissante elle ne peut pas converger vers 0, ainsi $\ell = 2$.

(c) $]2,+\infty]$ est bien stable par f donc dans ce cas u est encore bien définie et à valeurs dans $]2,+\infty[$, le même calcul montre que u est décroissante, comme elle est minorée elle converge et c'est vers 2.
Et pour $a = 0$ on a affaire à la suite constante égale à 0

10° (a) Soit f une fonction continue sur un intervalle $I = [a,b]$, si k est entre $f(a)$ et $f(b)$ alors il existe $c \in I$ tel que $f(c) = k$.

(b) Il s'agit bien évidemment d'appliquer le TVI, reste à trouver la fonction. La voici : $g : x \mapsto f(x) - x$ dont on veut montrer qu'elle s'annule sur $I = [0,1]$. Cette fonction est bien continue, on a $g(0) = f(0) \geq 0$ (puisque f est à valeurs positives) et $g(1) = f(1) - 1 \leq 1$ (puisque f est à valeurs dans $[0,1]$). Le théorème des valeurs intermédiaires s'applique donc, il existe donc $x_0 \in [0,1]$ tel que $g(x_0) = 0$ ie tel que $f(x_0) = x_0$.

(c) On note tout d'abord que g est bien définie et continue sur $[0,1]$, que $g(0) = 1$ et $g(1) = -1$, ainsi la fonction g possède bien un zéro sur $[0,1]$. En `Python` on peut rédiger l'algorithme de dichotomie :

```
def g(x):
    return sqrt(1-x**3/2)-x
a,b,eps = 0,1,0.0001
while (b-a)>=2*eps:
    m = (b+a)/2
    if f(m)*f(b)<0:
        a = m
    else:
        b = m
print('la limite de u au dix-millieme près est ',m)
```

11° $F : x \mapsto 2\sqrt{x^2+1}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
$G : x \mapsto \ln|\ln(x)|$ est une primitive de g sur $]0,1[$ (et sur $]1,+\infty[$).

12° C'est l'un des cadres standard d'application de l'IPP.
Par le théorème fondamentale de l'analyse, comme $f : t \mapsto t\mathrm{e}^{2t}$ est continue, on a bien que F est une primitive de f (c'est même la primitive de f qui s'annule en 0).
Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $u : t \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}$ (ainsi $u' : t \mapsto \mathrm{e}^{2t}$) et $v : t \mapsto t$ (ainsi $v' : t \mapsto 1$), les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,x]$ (où $[x,0]$), ainsi par intégration par parties on a : $F(x) = \left[\frac{t\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t = \frac{x}{2}\mathrm{e}^{2x} - \left[\frac{\mathrm{e}^{2t}}{4}\right]_0^x = \frac{x}{2}\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{4}$.

13° Quand un ensemble de $\mathbb{R}^n$ est donné par un système d'équations il est facile d'en déduire son écriture comme un Vect.
$(x,y,z) \in V \Leftrightarrow z = -x-y$ donc $V = \{(x,y,-x-y) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}((1,0,-1),(0,1,-1))$ donc V est un sev de $E = \mathbb{R}^3$.
La famille génératrice précédente est constituée de deux vecteurs non colinéaires donc est libre par suite c'est une base de V et donc $\dim V = 2$. Directement $W = \mathrm{Vect}((1,1,1))$ donc W est un sev de dimension 1 de E.
Il y a plusieurs voies pour montrer $E = F \oplus G$:
- montrer que tout (x,y,z) s'écrit de façon con unique comme somme de $v + w$ où $v \in V$ et $w \in W$.
- montrer que $V + W$ est de dimension 3 ie. ici que $V \cap W = \{0\}$ (le plus facile ?)

- ou encore de montrer que la concaténation de bases de V et W est une base de E. Pour cela on peut calculer le déterminant de la matrice 3×3 correspondante et montrer qu'il est non nul, ou bien montrer que $(1,1,1)$ n'est pas combinaison linéaire de $(1,0,-1)$ et $(0,1,-1)$. Par exemple $(1,1,1)=\alpha(1,0,-1)+\beta(0,1,-1)\Rightarrow \alpha=\beta=1$ absurde. Ou encore plus rapide $(1,1,1)$ n'est pas dans le plan V (évidente puisque $1+1+1=3\neq 0$).

14° Plusieurs possibilités ici vu la forme de la matrice.

(a) On applique l'algorithme de Gauss-Jordan dont on ne donne que les étapes (possibles) : $L_2\leftarrow L_2-L_3$; $L_3\leftarrow 2L_3-L_1$; $L_3\leftarrow \frac{L_3-L_2}{4}$ à ce stade la matrice est triangulaire supérieure sans coefficient diagonal nul donc est inversible de même que A. On poursuit par $L_2\leftarrow L_2+L_3$ et on finit avec $L_1\leftarrow \frac{1}{2}(L_1-L_2-L_3)$.

(b) On écrit $M=J+I$ où J est la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont 1.
Alors $M^2=(J+I)^2=J^2+2J+I$ car I commute avec J.
Or $J^2=3J$ donc $M^2=5J+I=5M-4I$ donc $M(M-5I)=-4I$ d'où $M\left[\frac{1}{4}(5I-M)\right]=I$. Dont il suit que M est inversible d'inverse $\frac{1}{4}(5I-M)$.

dans les deux cas on a trouvé $M^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-1&3&-1\\-1&-1&3\end{pmatrix}$

Exercice 3.

15° Linéariser $\sin^5(\theta)$.

16° Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^\star, \arctan(x)+\arctan\left(\frac{1}{x}\right)=\mathrm{sg}(x)\frac{\pi}{2}$, où $\mathrm{sg}(x)$ désigne le signe de x.

17° On note X le résultat du lancer d'un dé truqué à 6 faces tel que la probabilité de chacune des face est proportionnelle à son numéro. Déterminer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance.

18° Donner la matrice de $s(x,y)=\left(\frac{-x-2y}{3},\frac{-4x+y}{3}\right)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et dans la base $((1,-2),(1,1))$.

Correction :

15° $\sin^5\theta=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right)^5$.
On développe avec la formule du binôme de Newton (revoir le triangle de Pascal si nécessaire pour le calcul des coefficients binomiaux).
$\sin^5\theta=\frac{1}{2^5\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}\theta}-5\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}+10\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-10\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}+5\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-5\mathrm{i}\theta}\right)=\frac{-\mathrm{i}}{2^5}\left(2\mathrm{i}\sin 5\theta-10\mathrm{i}\sin 3\theta+20\mathrm{i}\sin\theta\right)$.
Et finalement $\sin^5\theta=\frac{1}{16}\sin 5\theta-\frac{5}{16}\sin 3\theta+\frac{5}{8}\sin\theta$.

16° Le membre de gauche définit une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $x\mapsto \frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=0$.
Danger ! Ne pas conclure à la constance de f sur $\mathbb{R}^*$: c'est vrai sur tout **intervalle** de cet ensemble mais pas globalement ! Ainsi f est constante sur $\mathbb{R}_-^\star$ et sur $\mathbb{R}_+^\star$. Reste à vérifier à déterminer ces constantes. Pour cela on peut calculer les limites en $\pm\infty$. De $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$ et $\arctan 0=0$ on tire $\lim\limits_{+\infty} f=\dfrac{\pi}{2}$. De même pour la limite en $-\infty$ qui fournit le résultat escompté.

17° Soit p la probabilité que le dé tombe sur 1 ie. $\mathbb{P}(X=1)=p$. Alors $\mathbb{P}(X=k)=kp$ pour tout $k\in[\![1,6]\!]$ et, comme $\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}(X=x)=1$, on trouve l'équation $p+2p+3p+4p+5p+6p=1\Leftrightarrow 21p=1$ donc $p=\frac{1}{21}$.

Alors $\mathbb{E}(X)=\dfrac{1}{21}\displaystyle\sum_{k=1}^{6}k^2=\dfrac{6\times 7\times 13}{6\times 21}=\dfrac{91}{21}$ et de même on calcule $\mathbb{V}(X)$ *via* la formule de König-Huygens.

18° On a $s(1,0)=(-1/3,-4/3)$ et $s(0,1)=(-2/3,1/3)$, ainsi $A=\begin{pmatrix}-1/3&-2/3\\-4/3&1/3\end{pmatrix}=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2\\4&-1\end{pmatrix}$.
On peut aussi, comme c'est la base canonique, utiliser que c'est la matrice $A\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $s(x,y)$ correspond à $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.
La famille proposée est bien une base de $\mathbb{R}^2$: les vecteurs ne sont pas colinéaires et au nombre de deux. La matrice de passage de la base canonique à la base proposée est $P=\begin{pmatrix}1&1\\-2&1\end{pmatrix}$ et a pour inverse $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1\\2&1\end{pmatrix}$. Les formules de changement de base fournisse la matrice demandée $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$.
Alternative : on aurait tout aussi bien pu calculer les images de $(1,2)$ et $(1,1)$ par s puis déterminer leurs coordonnées dans la base $((1,2),(1,1))$; surtout ici vu le résultat obtenu : s est la symétrie d'axe la droite vectorielle engendrée par $(1,2)$.