DNS 1 : pour le vendredi 20 septembre

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1.
Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

1° Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \in [0,1]$.

2° Montrer que la fonction cos possède un unique point fixe sur $\mathbb{R}$ que l'on notera ℓ par la suite.

3° a) Montrer : $\exists k \in [0,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+2} - \ell| \leq k^n |u_2 - \ell|$.
b) En déduire que (u_n) converge vers ℓ.

4° Quelle est la nature de la série $\sum u_n - \ell$?

Exercice 2 *(Moyenne au sens de Cesàro).*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on considère la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des *moyennes de Cesàro* de (u_n) en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k.$$

L'objectif est de montrer que si (u_n) converge vers ℓ, alors (s_n) converge aussi vers ℓ.

1° Cas $\ell = 0$. On suppose que (u_n) converge vers 0.
Soit $\epsilon > 0$.
(a) Justifier qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_1$, $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$
(b) Montrer qu'il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_2$, $\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n_1-1} u_k\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
(c) En déduire (en coupant la somme définissant s_n en deux et en utilisant les deux questions précédentes) qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, |s_n| \leq \varepsilon$.
(d) En déduire que (s_n) converge vers 0.

2° Cas général : on suppose que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u'_n = u_n - \ell$ et $s'_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u'_k$.
Exprimer s'_n en fonction de s_n et en déduire que (s_n) converge aussi vers ℓ.

3° Montrer que la réciproque est fausse, on pourra considérer $(u_n) = ((-1)^n)$.

4° *Application* : Soit $u_0 \in]0,1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(1-u_n)$.
(a) Déterminer la nature et la limite éventuelle de (u_n).
(b) Déterminer la nature et la limite éventuelle de la suite (v_n) où $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.
(c) En utilisant le résultat qu'on vient de montrer sur la moyenne de Cesàro de (v_n), déterminer un équivalent de (u_n).

Exercice 3 *(calcul de la somme de $\sum \frac{1}{n^2}$).*
Le but de cet exercice est de calculer la somme de la série convergente $\sum \frac{1}{n^2}$.

1° Montrer que $t \mapsto \operatorname{cotan}^2 t$ réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle à déterminer.

2° Soit $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbb{N}$. En calculant de deux façons la partie imaginaire de $\dfrac{e^{(2n+1)it}}{\sin^{2n+1}(t)}$, trouver un polynôme $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin^{2n+1}(t)} = Q_n\left(\operatorname{cotan}^2(t)\right)$.

3° Déterminer alors les racines de Q_n, que l'on notera x_k pour $k \in [\![1, n]\!]$.
Justifier, sans calcul, les relations $3\sum_{k=1}^{n} x_k = n(2n-1)$ et $(2n+1)\prod_{k=1}^{n} x_k = 1$.

4° a) Montrer $1 + \operatorname{cotan}^2(t) = \dfrac{1}{\sin^2(t)}$ et en déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$ en fonction de n.

b) Montrer : $\forall t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\ \operatorname{cotan}^2(t) \leq \dfrac{1}{t^2} \leq \dfrac{1}{\sin^2(t)}$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

5° En procédant comme dans la preuve de la convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$, montrer que le reste d'ordre n de cette série est majoré par $\frac{1}{n}$. Écrire alors un script Python donnant une valeur approchée de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ avec 5 décimales exactes et comparer avec la valeur trouvée en 4° (b)).

Exercice 4 *(calcul de la somme de $\sum \frac{1}{n^2}$)***.**
Le but de cet exercice est de calculer la somme de la série convergente $\sum 1/n^2$. On pose S_n sa n-ème somme partielle et on introduit, pour $p \in \mathbb{N}$, les intégrales :

$$I_p = \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t)\mathrm{d}t \text{ et } J_p = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2p} \mathrm{d}t.$$

1° a) Montrer que l'équation $\cos x = \frac{2}{\pi}$ possède une unique solution dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Montrer que : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \ t \leq \frac{\pi}{2} \sin t$.

c) Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, que : $0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4}\left(I_p - I_{p+1}\right)$.

d) Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, que : $I_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2} I_p$. (*Indication :* IPP)

e) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{J_p}{I_p}\right) = 0$

2° (a) Exprimer I_p en fonction de J_p et de J_{p-1}. (*Indication :* IPP)

(b) En déduire, pour $p \in \mathbb{N}^\star$, que : $\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{1}{2p^2}$.

(c) Exprimer S_n à l'aide de $\left(\frac{J_p}{I_p}\right)$.

(d) Calculer I_0 et J_0, puis en déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

3° En procédant comme dans la preuve de la convergence de $\sum 1/n^2$, montrer que le reste d'ordre n de cette série est majoré par $\frac{1}{n}$. Écrire alors un script Python donnant une valeur approchée de $\zeta(2)$ avec 5 décimales exactes et comparer avec la valeur trouvée en 2° (d)).