DS 2 : samedi 21 septembre

2h sans calculatrice

Le candidat numérotera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 *(le cours et ses méthodes)*.
1° **Cours.**

a) Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives telles que :

$$\exists n_0 \,/\, \forall n \geq n_0,\ 0 \leq u_n \leq v_n.$$

Monter que si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge et que si la série $\sum u_n$ diverge alors il en est de même pour la série $\sum v_n$.

b) Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses, donner une démonstration pour celles qui sont vraies et un contre-exemple pour celles qui sont fausses. (u_n) et (v_n) désignent deux suites réelles.

(i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\sum u_n$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2° **Application des méthodes du cours.**

a) Justifier l'existence et calculer la valeur de :

(i) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3^n}{2^{2n}}$;

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

b) Déterminer la nature de :

(i) $\sum n\mathrm{e}^{-n}$;

(ii) $\sum \frac{\ln(n)}{n}$;

(iii) $\sum -\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$;

(iv) $\sum \frac{n!}{n^n}$.

c) Soit $\alpha > 1$, déterminer un équivalent de la suite (R_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par : $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Indication : On pourra introduire, pour $n \in \mathbb{N}$ et $N \geq n$, $R_{n,N} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha}$ et procéder à une comparaison série/intégrale.

Exercice 2 *(D'après les questions de cours de* E3A PSI*, Maths 1,* 2008*)*.
1° (rajout) Étudier les variations de $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.

2° Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.

Exercice 3 *(*E3A PC*, Maths 1,* 2019*, exercice 1)*.
1° **Question de cours** : Rappeler sans démonstration pour quelles valeurs du réel α la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente.

2° Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

a) On pose pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, $s_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p}$

Vérifier que la suite $(s_p)_{p\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante et divergente.

b) Montrer qu'il existe au moins un entier naturel p tel que l'on ait : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} > 1$.

On note alors $a_n = n + p_n$ où p_n est le plus petit entier p vérifiant cette propriété et on pose : $u_n = \frac{a_n}{n}$.
On a donc : $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} > 1$.

3° La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est-elle convergente ?

4° Prouver pour $n \geq 2$ que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} < 1 \text{ et } \sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n-2} > 1.$$

5° Montrer que si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ, alors $\ell \in [2,3]$.

6° Prouver que l'on a, pour tout entier naturel non nul n : $1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant 1 + \frac{1}{a_n}$

7° Démontrer que l'on a, pour tout entier naturel non nul n :

$$1 - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leq \int_n^{a_n} \frac{\mathsf{d}t}{t} \leq \frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{a_n - 1} \leq 1.$$

8° En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.