DNS 1 : pour le vendredi 20 septembre

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1.
Soit $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

1° Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \in [0,1]$.

2° Montrer que la fonction cos possède un unique point fixe sur $\mathbb{R}$ que l'on notera ℓ par la suite.

3° a) Montrer : $\exists k \in [0,1[, \forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+2} - \ell| \leq k^n|u_2 - \ell|$.

b) En déduire que (u_n) converge vers ℓ.

4° Quelle est la nature de la série $\sum u_n - \ell$?

Correction :

1° Comme cos est définie sur $\mathbb{R}$ qui est un intervalle stable pour cos, on a que (u_n) est bien défini.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+2} = \cos(\cos(u_n)) = \cos^2(u_n) \in [0,1]$.
Alternative : Comme $\cos(u_n) \in [-1,1]$ et comme $[-1,1]$ est inclus dans $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ le cosinus y est positif, ainsi $u_{n+2} \in [0,1]$.

2° Comme cos prend ses valeurs dans $[-1,1]$ cette fonction ne possède pas de point fixe en dehors de cet intervalle. De même par parité l'intervalle $[-1,0[$ ne peut contenir de point fixe de cos.
On se place donc sur $[0,1]$, intervalle sur lequel la fonction $\mathrm{Id} - \cos$ est continue et strictement croissante, donc réalise une bijection sur $[0 - \cos(0), 1 - \cos(1)]$. Puisque 0 appartient à cet intervalle image il lui correspond un unique antécédent ℓ par $\mathrm{Id} - \cos$ ie. cos possède un unique point fixe ℓ sur $[0,1]$, donc sur $\mathbb{R}$.
Remarque : On peut aussi étudier $\mathrm{Id} - \cos$ directement sur $\mathbb{R}$, par contre pour la stricte monotonie il faut invoquer que l'ensemble des points où la dérivée s'annule ne contient pas d'intervalle plus gros que des singletons.

3° a) la fonction cos est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$, de plus pour tout $x \in [0,1]$ on a $|\cos'(x)| \leq \sin(1)$, on pose alors $k = \sin(1) \in]0,1[$, ainsi d'après l'inégalité des accroissements finis on a, pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, que : $|\cos(x) - \cos(y)| \leq k|x-y|$.
Montrons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+2} - \ell| \leq k^{n-2}|u_2 - \ell|$, par récurrence.
Initialisation : Pour $n = 0$ on a $|u_2 - \ell| = k^0|u_2 - \ell|$ donc la propriété est vraie au rang 0.
Hérédité : On suppose la propriété vraie au rang n ie. $|u_{n+2} - \ell| \leq k^n|u_2 - \ell|$.
On applique ensuite l'IAF à cos entre u_{n+2} et ℓ qui sont tous deux éléments de $[0,1]$ ainsi $|\cos(u_{n+2}) - \cos(\ell)| \leq k|u_{n+2} - \ell|$.
Ainsi $|u_{n+3} - \ell| \leq k|u_{n+2} - \ell|$ et il ne reste qu'à utiliser l'hypothèse de récurrence et la transitivité de $\leq$ pour obtenir : $|u_{n+3} - \ell| \leq k^{n+1}|u_2 - \ell|$.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, $|u_{n+2} - \ell| \leq k^n|u_2 - \ell|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour $k = \sin(1)$.

b) Comme $|k| < 1$, $\lim k^n = 0$ et par encadrement $\lim |u_{n+2} - \ell| = 0$ ie u converge vers ℓ.

4° Comme $|k| < 1$, $\sum k^n$ converge donc $\sum |u_{n+2} - \ell|$ aussi par comparaison de série à termes positifs.
Il s'ensuit que $\sum u_n - \ell$ converge absolument donc converge.

Exercice 2 *(Moyenne au sens de Cesàro)*.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on considère la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des *moyennes de Cesàro* de (u_n) en posant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, s_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_k.$$

L'objectif est de montrer que si (u_n) converge vers ℓ, alors (s_n) converge aussi vers ℓ.

1° Cas $\ell = 0$. On suppose que (u_n) converge vers 0.
Soit $\epsilon > 0$.

(a) Justifier qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_1,\ |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

(b) Montrer qu'il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_2,\ \left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n_1-1} u_k\right| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

(c) En déduire (en coupant la somme définissant s_n en deux et en utilisant les deux questions précédentes) qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, |s_n| \leq \varepsilon$.

(d) En déduire que (s_n) converge vers 0.

2° Cas général : on suppose que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u'_n = u_n - \ell$ et $s'_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u'_k$.

Exprimer s'_n en fonction de s_n et en déduire que (s_n) converge aussi vers ℓ.

3° Montrer que la réciproque est fausse, on pourra considérer $(u_n) = ((-1)^n)$.

4° *Application* : Soit $u_0 \in]0, 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$.

(a) Déterminer la nature et la limite éventuelle de (u_n).

(b) Déterminer la nature et la limite éventuelle de la suite (v_n) où $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.

(c) En utilisant le résultat qu'on vient de montrer sur la moyenne de Cesàro de (v_n), déterminer un équivalent de (u_n).

Correction :

1° (a) Ce n'est rien d'autre que la définition de (u_n) converge vers 0 avec $\frac{\varepsilon}{2}$.

(b) On a $(\frac{1}{n})$ qui tend vers 0 et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n_1-1} u_k$ qui est constant par rapport à n, ainsi $\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n_1-1} u_k\right)$ converge vers 0, l'inégalité est, encore une fois, la convergence de cette dernière suite vers 0 avec $\frac{\varepsilon}{2}$.

(c) Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Pour $n \geq n_0$, on a : $s_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n_1-1} u_k + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n_1}^{n-1} u_k$, ainsi, d'après l'inégalité triangulaire $|s_n| \leq \left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n_1-1} u_k\right| + \left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n_1}^{n-1} u_k\right|$, on a, encore d'après l'inégalité triangulaire et d'après 1°(a) : $\left|\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n_1}^{n-1} u_k\right| \leq \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n_1}^{n-1} |u_k| \leq \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=n_1}^{n-1} \dfrac{\varepsilon}{2} = \dfrac{n-1-n_1+1}{n}\dfrac{\varepsilon}{2} \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ (car $n - n_1 \leq n$). Ainsi, en utilisant aussi 1°(b) on a : $|s_n| \leq \varepsilon$.

(d) On vient de montrer que : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0,\ |s_n| \leq \varepsilon$, ie que (s_n) converge vers 0.

2° Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $s'_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(u_n - \ell) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_n - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ell = s_n - \dfrac{n}{n}\ell = s_n - \ell$. Comme (u'_n) converge vers 0, on en déduit, d'après 1° donc que (s'_n) converge aussi vers 0 et donc que (s_n) converge vers ℓ.

3° Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$, ainsi $s_{2n} = 0$ et $s_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}$ ainsi la sous suite des termes pair et la sous suite des termes impair de (s_n) convergent vers 0, donc (s_n) converge vers 0.
On a donc une suite divergente dont sa moyenne de Cesàro converge, ce qui montre bien que la réciproque est fausse.

4° (a) Tout d'abord on remarque que si $u_n \in]0, 1[$ alors $u_{n+1} \in]0, 1[$, comme u_0 est aussi dans $]0, 1[$, on en déduit donc par récurrence directe que (u_n) est à valeurs dans $]0, 1[$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ ainsi $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$, la suite (u_n) est donc décroissante, comme de plus elle est minorée (par 0), elle converge donc vers un certain $\ell \in [0, 1]$, en passant à la limite dans la relation de récurrence on en déduit que $\ell = \ell - \ell^2$, ie $\ell = 0$. Ainsi (u_n) converge vers 0.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = \frac{1}{u_n(1-u_n)} - \frac{1}{u_n} = \frac{1-(1-u_n)}{u_n(1-u_n)} = \frac{1}{1-u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

(c) Ainsi, d'après 2^0, la suite (s_n) des moyennes de Cesàro de (v_n) converge aussi vers 1, or pour $n \in \mathbb{N}$, par télescopage, on a : $s_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{u_{k+1}} - \dfrac{1}{u_k} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{u_0}\right) = \dfrac{1}{nu_n} - \dfrac{1}{nu_0}$, comme (s_n) tend vers 1 et comme $(\frac{1}{nu_0})$ tend vers 0, on en déduit donc que $(\frac{1}{nu_n})$ converge vers 1, ie $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

Exercice 3 *(calcul de la somme de $\sum \frac{1}{n^2}$).*
Le but de cet exercice est de calculer la somme de la série convergente $\sum \frac{1}{n^2}$.

1° Montrer que $t \mapsto \text{cotan}^2 t$ réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle à déterminer.

2° Soit $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbb{N}$. En calculant de deux façons la partie imaginaire de $\dfrac{e^{(2n+1)it}}{\sin^{2n+1}(t)}$, trouver un polynôme $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin^{2n+1}(t)} = Q_n\left(\text{cotan}^2(t)\right)$.

3° Déterminer alors les racines de Q_n, que l'on notera x_k pour $k \in [\![1, n]\!]$.
Justifier, sans calcul, les relations $3\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = n(2n-1)$ et $(2n+1)\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k = 1$.

4° a) Montrer $1 + \text{cotan}^2(t) = \dfrac{1}{\sin^2(t)}$ et en déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$ en fonction de n.

b) Montrer : $\forall t \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\ \text{cotan}^2(t) \leq \dfrac{1}{t^2} \leq \dfrac{1}{\sin^2(t)}$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

5° En procédant comme dans la preuve de la convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$, montrer que le reste d'ordre n de cette série est majoré par $\frac{1}{n}$. Écrire alors un script Python donnant une valeur approchée de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ avec 5 décimales exactes et comparer avec la valeur trouvée en 4° (b)).

Correction :

1° La fonction cotan^2 est une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ (à détailler : elle est strictement décroissante + limites).
Remarque : pour montrer la stricte monotonie de cotan^2 on peut, au choix, remarquer qu'elle est dérivable et que $(\text{cotan}^2)' = \frac{-2\cos}{\sin^3} < 0$, ou alors remarquer que c'est la composée de tan (strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et de $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ (strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$).

2° Soit $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $n \in \mathbb{N}$. On a : $\text{Im}\left(\dfrac{e^{(2n+1)it}}{\sin^{2n+1}(t)}\right) = \dfrac{1}{\sin^{2n+1}(t)} \text{Im}\left(\cos((2n+1)t) + i\sin((2n+1)t)\right) = \dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin^{2n+1}(t)}$, d'autre part en utilisant la formule de Moivre et en utilisant la formule du binôme de Newton : $e^{(2n+1)it} = \left(e^{it}\right)^{2n+1} = (\cos t + i\sin t)^{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} i^k \sin^k t \cos^{2n+1-k} t$, donc $\text{Im}\left(e^{(2n+1)it}\right) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p \sin^{2p+1} t \cos^{2n+1-2p-1} t$, ainsi : $\text{Im}\left(\dfrac{e^{(2n+1)it}}{\sin^{2n+1}(t)}\right) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p \sin^{2p+1-2n-1} t \cos^{2n-2p} t = \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p (\text{cotan}^2)^{n-p}(t)$. D'où il suffit de poser $Q_n(X) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p X^{n-p}$ ie. (en ré-indexant) : $Q_n(X) = \displaystyle\sum_{q=0}^{n} \binom{2n+1}{2q} (-1)^{n-q} X^q$ (car $\binom{2n+1}{2n+1-2q} = \binom{2n+1}{2q}$ par la formule de symétrie).

3° Q_n est un polynôme de degré n, si on trouve n racines distinctes on les a toutes trouvées. l'égalité $\dfrac{\sin((2n+1))t}{\sin^{2n+1}(t)} = Q_n\left(\text{cotan}^2(t)\right)$ nous amène à trouver les solutions de $\sin((2n+1)t) = 0$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on trouve les $t_k = \frac{k\pi}{2n+1}$ pour $k \in [\![1, n]\!]$. En posant $x_k = \text{cotan}^2 t_k$ on a des racines de Q_n, comme cotan^2 est bijective (donc injective) les x_k sont deux à deux distincts. Ce qui montre que les $x_k = \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ sont les racines de Q_n.
Les relations proviennent des relations coefficients/racines, la somme des racines est l'opposé du quotient du coefficient devant X^{n-1} (qui est $-\binom{2n+1}{2n-2} = -\frac{(2n+1)2n(2n-1)}{6}$) par le coefficient dominant (qui est $\binom{2n+1}{2n} = 2n+1$), c'est donc $\frac{n(2n-1)}{3}$. Le produit des racines quand à lui est la produit de $(-1)^n$ par le quotient du terme constant (qui est $\binom{2n+1}{0}(-1)^n$) par le terme dominant (qui est toujours $2n+1$), c'est donc $\frac{1}{2n+1}$. Ce qui est bien équivalent aux deux relations données.

4° a) On a : $1 + \text{cotan}^2 = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\sin^2} = \frac{1}{\sin^2}$. On a donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \sum_{k=1}^{n} 1 + \text{cotan}^2(t_k) = \sum_{k=1}^{n} 1 + x_k =$

$$n + \frac{n(2n-1)}{3} = \frac{2n(n+1)}{3}$$ (d'après la question précédente).

b) Comme les trois membres de l'inégalité sont positifs (et que la fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et que la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$) c'est équivalent à $\tan t \geq t \geq \sin t$, ce qui est vrai sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ($\sin t \leq t$ est classique, pour $\tan t \geq t$ on peut étudier la fonction $t \mapsto \tan t - t$, à ce stade un "par une étude de fonction on a : ...", si c'était une première question d'un problème on devrait forcément rédiger l'étude de fonction).

On utilise cet encadrement pour $t = t_k$ et on somme pour k allant de 1 à n, ce qui donne : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2(t_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t_k^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2(t_k)}$ Or on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2(t_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{n(2n-1)}{3}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{t_k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2} = \frac{(2n+1)^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2(t_k)} = \frac{2n(n+1)}{3}$ (d'après la question précédente). Il en résulte que : $\displaystyle\frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\frac{n(2n-1)}{3} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{(2n+1)^2}\frac{2n(n+1)}{3}$, les deux extrémités de l'encadrement tendent vers $\frac{\pi^2}{6}$, ainsi par le théorème d'encadrement on en déduit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

5° La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$, donc pour $k \in \mathbb{N}^\star$ on a : $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$ donc par croissance de l'intégrale : $\frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k^2}$, donc en sommant pour k allant de $n \in \mathbb{N}^\star$ à $N \in \mathbb{N}^\star$ avec $n \leq N$: $\displaystyle\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_n^{N+1} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{n} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k^2}$. Comme la série existe on peut prendre la limite quand $N \to +\infty$ et on a : $R_n \leq \frac{1}{n}$. Ainsi R_n est bien majoré par $\frac{1}{n}$ (et minoré par 0).

Code Python :

```python
import numpy as np

def zeta2(eps):
    # calcul d'une valeur approchée de zeta(2) à eps>0 près
    # grâce à R_n<=1/n
    S = 1   # somme partielle de rang 1
    # il suffit 1/n<eps pour avoir R_n<eps i.e. S_n approchant zeta(2) à eps près
    # ici while non utile, on peut résoudre : n>1/eps (ne pas oublier n entier) :
    for k in range(2,int(np.floor(1/eps)+1+1)):
        S += 1/k**2
    return S
print("zeta(2)=",zeta2(10**(-5)))
print("difference avec pi^2/6=",zeta2(10**(-5))-np.pi**2/6)
```

Exercice 4 *(calcul de la somme de $\sum \frac{1}{n^2}$).*
Le but de cet exercice est de calculer la somme de la série convergente $\sum 1/n^2$. On pose S_n sa n-ème somme partielle et on introduit, pour $p \in \mathbb{N}$, les intégrales :

$$I_p = \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t)\mathrm{d}t \text{ et } J_p = \int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2p}\mathrm{d}t.$$

1° a) Montrer que l'équation $\cos x = \frac{2}{\pi}$ possède une unique solution dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Montrer que : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $t \leq \frac{\pi}{2}\sin t$.

c) Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, que : $0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4}(I_p - I_{p+1})$.

d) Montrer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, que : $I_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2}I_p$. (*Indication :* IPP)

e) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{J_p}{I_p}\right) = 0$

2° (a) Exprimer I_p en fonction de J_p et de J_{p-1}. (*Indication :* IPP)

(b) En déduire, pour $p \in \mathbb{N}^\star$, que : $\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{1}{2p^2}$.

(c) Exprimer S_n à l'aide de $\left(\frac{J_p}{I_p}\right)$.

(d) Calculer I_0 et J_0, puis en déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

3° En procédant comme dans la preuve de la convergence de $\sum 1/n^2$, montrer que le reste d'ordre n de cette série est majoré par $\frac{1}{n}$. Écrire alors un script Python donnant une valeur approchée de $\zeta(2)$ avec 5 décimales exactes et comparer avec la valeur trouvée en 2° (d)).

Correction :

$$I_p = \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t)\mathsf{d}t \text{ et } J_p = \int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2p}\mathsf{d}t.$$

1° a) La fonction cos est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'image de cet intervalle est $[0,1]$, comme $\frac{2}{\pi} \in [0,1]$ l'équation possède une unique solution α.

b) Il suffit d'étudier $f : t \mapsto \frac{\pi}{2}\sin t - t$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, f est dérivable et pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $f'(t) = \frac{\pi}{2}\cos t - 1$ qui s'annule uniquement en α, ainsi f est croissante sur $[0, \alpha]$ et décroissante sur $\left[\alpha, \frac{\pi}{2}\right]$, comme $f(0) = f(\pi/2) = 0$ la fonction f est toujours positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Tout d'abord on remarque que J_p est bien positive (on intègre une fonction positive et les bornes sont dans "le bon sens"), on utilise la majoration de la question précédente pour avoir $J_p = \int_0^{\pi/2} t^2\cos^{2p}\mathsf{d}t \leq \int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}\sin t\right)^2\cos^{2p}\mathsf{d}t = \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2 t\right)^2\cos^{2p}\mathsf{d}t = \frac{\pi^2}{4}\left(I_p - I_{p+1}\right)$.

d) Comme conseillé on va procéder à une IPP on utilise $u(t) = sin(t)$ (ainsi $u'(t) = \cos(t)$) et $v(t) = \cos^{2p+1}$ (ainsi $v'(t) = -(2p+1)\sin(t)\cos^{2p}(t)$) qui sont bien de classe $\mathcal{C}^1$: $I_{p+1} = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^{2p+2}(t)\mathsf{d}t = \left[\sin(t)\cos^{2p+1}\right]_0^{\pi/2} + (2p+1)\int_0^{\pi/2} sin^2(t)\cos^{2p}(t)\mathsf{d}t = (2p+1)\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2(t))\cos^{2p}(t)\mathsf{d}t = (2p+1)(I_p - I_{p+1})$. Ainsi $(2p+2)I_{p+1} = (2p+1)I_p$, ie. $I_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2}I_p$.

e) On a : $0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4}(I_p - I_{p+1})$ donc (en utilisant l'égalité de la question précédente) : $0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4}I_p\left(1 - \frac{2p+1}{2p+2}\right)$, ie. (car $I_p > 0$) : $0 \leq \frac{J_p}{I_p} \leq \frac{\pi^2}{4}\left(1-\frac{2p+1}{2p+2}\right)$, l'expression de droite tend vers 0, en utilisant le théorème d'encadrement on trouve bien que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{J_p}{I_p}\right) = 0$

2° (a) Comme conseillé on va procéder à une IPP on utilise $u(t) = t$ (ainsi $u'(t) = 1$) et $v(t) = \cos^{2p}(t)$ (ainsi $v'(t) = -2p\sin(t)\cos^{2p-1}(t)$) qui sont bien de classe $\mathcal{C}^1$: $I_p = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^{2p}(t)\mathsf{d}t = \left[t\cos^{2p}(t)\right]_0^{\pi/2} + 2p\int_0^{\pi/2} t\sin(t)\cos^{2p-1}(t)\mathsf{d}t = 2p\int_0^{\pi/2} t\sin(t)\cos^{2p-1}(t)\mathsf{d}t$. On refait une IPP on utilise $u(t) = \frac{t^2}{2}$ (ainsi $u'(t) = t$) et $v(t) = \sin(t)\cos^{2p-1}(t)$ (ainsi $v'(t) = \cos^{2p}(t) - (2p-1)\sin^2(t)\cos^{2p-2}(t) = 2p\cos^{2p}(t) - (2p-1)\cos^{2p-2}(t)$) qui sont bien de classe $\mathcal{C}^1$: $I_p = 2p\left(\left[\frac{t^2}{2}\sin(t)\cos^{2p-1}(t)\right]_0^{\pi/2} - \displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{t^2}{2}\left(2p\cos^{2p}(t) - (2p-1)\cos^{2p-2}(t)\right)\mathsf{d}t\right)$. D'où $I_p = -2p^2J_p + p(2p-1)J_{p-1}$.

(b) On a $2p^2J_p = p(2p-1)J_{p-1} - I_p$, d'où (car $I_p \neq 0$) $2p^2\frac{J_p}{I_p} = p(2p-1)\frac{J_{p-1}}{Ip} - 1$, ainsi en utilisant 1°.d) : $2p^2\frac{J_p}{I_p} = \frac{p(2p-1)2p}{2p-1}\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - 1$ donc $\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{1}{2p^2}$.

(c) On somme les inégalités précédentes pour p allant de 1 à n et on utilise que le membre de gauche est télescopique : $S_n = 2\left(\frac{J_0}{I_0} - \frac{J_n}{I_n}\right)$

(d) En faisant tendre n vers $+\infty$ on a alors $\zeta(Z) = 2\frac{J_0}{I_0}$. Or $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $J_0 = \frac{\pi^3}{24}$, d'où $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

3° La fonction $t \mapsto t^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^\star$, donc pour $k \in \mathbb{N}^\star$ on a : $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{k^2}$ donc par croissance de l'intégrale : $\frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1}\frac{1}{t^2}\mathsf{d}t \leq \frac{1}{k^2}$, donc en sommant pour k allant de $n \in \mathbb{N}^\star$ à $N \in \mathbb{N}^\star$ avec $n \leq N$: $\sum_{k=n}^N \frac{1}{(k+1)^2} \leq \int_n^{N+1}\frac{1}{t^2}\mathsf{d}t = \frac{1}{n} - \frac{1}{N+1} \leq \sum_{k=n}^N\frac{1}{k^2}$. Comme la série existe on peut prendre la limite quand $N \to +\infty$ et on a : $R_n \leq \frac{1}{n}$. Ainsi R_n est bien majoré par $\frac{1}{n}$ (et minoré par 0).

Code Python :

```
import numpy as np

def zeta2(eps):
    # calcul d'une valeur approchée de zeta(2) à eps>0 près
    # grâce à R_n<=1/n
    S = 1   # somme partielle de rang 1
    # il suffit 1/n<eps pour avoir R_n<eps i.e. S_n approchant zeta(2) à eps près
    # ici while non utile, on peut résoudre : n>1/eps (ne pas oublier n entier) :
```

```
    for k in range(2,int(np.floor(1/eps)+1+1)):
        S += 1/k**2
    return S
print("zeta(2)=",zeta2(10**(-5)))
print("difference avec pi^2/6=",zeta2(10**(-5))-np.pi**2/6)
```