DS 2 : samedi 21 septembre

2h sans calculatrice

Le candidat numérotera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1 *(le cours et ses méthodes)*.
1° **Cours.**

a) Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives telles que :

$$\exists n_0 \,/\, \forall n \geq n_0,\, 0 \leq u_n \leq v_n.$$

Monter que si la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge et que si la série $\sum u_n$ diverge alors il en est de même pour la série $\sum v_n$.

b) Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses, donner une démonstration pour celles qui sont vraies et un contre-exemple pour celles qui sont fausses. (u_n) et (v_n) désignent deux suites réelles.

(i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors $\sum u_n$ converge.

(ii) Si $\sum u_n$ converge alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

2° **Application des méthodes du cours.**

a) Justifier l'existence et calculer la valeur de :

(i) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{3^n}{2^{2n}}$;

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$.

b) Déterminer la nature de :

(i) $\sum n\mathrm{e}^{-n}$;

(ii) $\sum \frac{\ln(n)}{n}$;

(iii) $\sum -\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$;

(iv) $\sum \frac{n!}{n^n}$.

c) Soit $\alpha > 1$, déterminer un équivalent de la suite (R_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par : $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Indication : On pourra introduire, pour $n \in \mathbb{N}$ et $N \geq n$, $R_{n,N} = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha}$ et procéder à une comparaison série/intégrale.

Correction :

1° a) Notons (S_n) (resp. (T_n)) la suite des sommes partielles de (u_n) (resp. (v_n). On sait que pour tout $k \geq n_0$ on a $0 \leq u_k \leq v_k$, en sommant ces inégalités pour k allant de n_0 à n on a $0 \leq S_n - S_{n_0} \leq T_n - T_{n_0}$. Comme on considère des SATP, les suites (S_n) et (T_n) sont croissantes (en effet pour tout n, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$).
Si $\sum v_n$ converge alors (T_n) possède une limite donc (T_n) est majoré, il en va de même pour $(T_n + S_{n_0} - T_{n_0})$ (si T_n est majoré par M, $T_n + S_{n_0} - T_{n_0}$ est alors majoré par $M + S_{n_0} - T_{n_0}$) ainsi la suite (S_n) est croissante et majorée, elle converge donc d'après le théorème de la limite monotone, ce qui reviens exactement à dire que $\sum u_n$ est convergente.
Si $\sum u_n$ est divergente alors (S_n) est divergente, comme elle est croissante on a donc $\lim S_n = +\infty$, ainsi (T_n) est minorée par une une suite qui tend vers $+\infty$, donc (d'après le théorème de comparaison pour les suites) (T_n) diverge aussi vers $+\infty$, ie. la série $\sum v_n$ est divergente.

b) (i) C'est faux, la série harmonique (ie. $\sum \frac{1}{n}$) est divergente alors que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0.

(ii) On suppose $\sum u_n$ convergente, notons (S_n) la suite des sommes partielles, comme $\sum u_n$ converge on a (S_n) qui converge vers un certain $\ell \in \mathbb{R}$, il en va de même pour la suite (S_{n-1}). En remarquant, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, que $u_n = S_n - S_{n-1}$ on en déduit que la suite (u_n) converge vers $\ell - \ell = 0$.

2° a) (a) C'est une série géométrique de raison $\frac{3}{4} < 1$, sa somme existe donc et vaut : $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{27}{16}$ (attn au premier terme).

(b) Décomposition en éléments simples : $\forall n \geq 1$, $\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$. Puis télescopage pour une somme partielle valant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)$ d'où la convergence de la série et une somme de $3/4$

b) (i) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = n\mathrm{e}^{-n}$, on a $n^2 u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ainsi $u_n = o(\frac{1}{n^2})$, comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge absolument on a $\sum u_n$ qui converge absolument donc converge.

(ii) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \frac{\ln(n)}{n}$, on a : $nu_n = \ln(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, ainsi son inverse tend vers 0 et donc $\frac{1}{n} = o(u_n)$, comme on a des SATP et comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge il en va de même pour $\sum u_n$. *Alternative* : pour $n \geq 3$, $\ln(n) \geq 1$, ainsi $\frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$ puis même conclusion.

(iii) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = -\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. On a $u_n = -\ln(1 - \frac{1}{2n^2}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2} > 0$, comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, il en va de même pour $\sum u_n$

(iv) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, posons $u_n = \frac{n!}{n^n} > 0$, on a : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\frac{n^n}{n!} = (\frac{n}{n+1})^n = (1+\frac{1}{n})^{-n} = \exp(-n\ln(1+\frac{1}{n})) = \exp(-n(\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))) = \exp(-1 + o(1)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1} < 1$, ainsi d'après le critère de d'Alembert $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

c) On fait une comparaison série-intégrale. Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, comme $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $[k, k+1]$, on a pour tout $t \in [k, k+1]$: $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$, on intègre ensuite t entre k et $k+1$ pour trouver $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\mathsf{d}t \leq \frac{1}{k^\alpha}$, puis on somme pour k allant de $n+1$ à N (on a le droit) pour trouver : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_{n+1}^{N+1} \frac{1}{t^\alpha}\mathsf{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^\alpha}$.

Or $\displaystyle\int_{n+1}^{N} \frac{1}{t^\alpha}\mathsf{d}t = \frac{(N+1)^{-\alpha+1}}{1-\alpha} - \frac{(n+1)^{-\alpha+1}}{1-\alpha}$ Comme $1-\alpha < 0$, $\lim\limits_{N\to+\infty} (N+1)^{-\alpha+1} = 0$, donc en faisant tendre N vers $+\infty$ (pour les séries on a le droit) on a : $R_{n+1} \leq \dfrac{(n+1)^{-\alpha+1}}{\alpha-1} \leq R_n$.

Ce qui permet d'obtenir : $\frac{(n+1)^{-\alpha+1}}{\alpha-1} \leq R_n \leq \frac{(n)^{-\alpha+1}}{\alpha-1}$.

Comme le majorant et le minorant sont équivalents, on en déduit donc que $R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

Exercice 2 *(D'après les questions de cours de* E3A PSI*, Maths 1,* 2008*)*.

1° (rajout) Étudier les variations de $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.

2° Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$.

Correction :

1° La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$, de plus, pour $x > 0$, on a $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$, on en déduit donc que f est croissante sur $]0, \mathrm{e}[$ et est décroissante sur $]\mathrm{e}, +\infty[$.

2° Notons, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, u_n le terme général de la série et posons, pour $n \geq 1$, $a_n = \frac{\ln(n)}{n}$. Ainsi pour tout $n \geq 1$, $u_n = (-1)^n a_n$, on a $a_n > 0$ pour $n \geq 2$, on a (par croissance comparée) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, de plus d'après la question précédente $(a_n)_{n\geq 3}$ est décroissante (attention on a seulement la décroissance à partir du rang 3), on peut donc appliquer le TSA pour en déduire que $\displaystyle\sum_{n\geq 3} u_n$ converge, comme $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ est de même nature , elle converge aussi.

Exercice 3 *(E3A PC, Maths 1, 2019, exercice 1).*

1° **Question de cours** : Rappeler sans démonstration pour quelles valeurs du réel α la série $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente.

2° Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

a) On pose pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, $s_p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+p}$

Vérifier que la suite $(s_p)_{p\in\mathbb{N}^\star}$ est croissante et divergente.

b) Montrer qu'il existe au moins un entier naturel p tel que l'on ait : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+p} > 1.$

On note alors $a_n = n + p_n$ où p_n est le plus petit entier p vérifiant cette propriété et on pose : $u_n = \frac{a_n}{n}$.
On a donc : $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{a_n} > 1$.

3° La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est-elle convergente ?

4° Prouver pour $n \geq 2$ que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n-1} < 1 \text{ et } \sum_{k=0}^{2n-2}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{3n-2} > 1.$$

5° Montrer que si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ, alors $\ell \in [2,3]$.

6° Prouver que l'on a, pour tout entier naturel non nul n : $1 < \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{a_n} \leqslant 1+\frac{1}{a_n}$

7° Démontrer que l'on a, pour tout entier naturel non nul n :

$$1-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{a_n} \leq \int_n^{a_n}\frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{a_n-1} \leq 1.$$

8° En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Correction :

1° On a : $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2° Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

a) Pour $p \in \mathbb{N}^\star$, on a : $s_{p+1} - s_p = \frac{1}{n+p+1} \geq 0$, ainsi (s_p) est croissante.

Notons, pour $q \in \mathbb{N}^\star$, $H_q = \displaystyle\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{k}$, on sait que $\displaystyle\lim_{q\to+\infty} H_q = +\infty$.

Or, pour $p \geq 1$, on a $s_p = H_{p+n} - H_{n-1}$, comme H_{n-1} est constant par rapport à p, on a : $s_p \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et (s_p) est bien divergente.

Alternative : À $n \in \mathbb{N}$ fixé s_p est la somme partielle d'ordre p de la série $\sum_{p\geq 1}\dfrac{1}{n+p}$ dont le terme général est positif et équivalent à $\frac{1}{p}$ en $+\infty$, donc s_p diverge puisque la série harmonique diverge. **Attention** : cet argument marche car n est fixé, par contre si on considère la convergence de $t_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ cet argument ne fonctionne pas du tout, déjà parce que ce n'est PAS la somme partielle d'une série, d'ailleurs on a vu (verra ?) dans l'exercice 17 que cette suite $(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k})$ converge.

b) Par définition de la limite, pour $A = 2$ il existe $P \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq P$, $s_p \geq 2$, en particulier pour $p = P$ on a $s_P \geq 2 > 1$.

Remarque : Ainsi $\{p \in \mathbb{N} \,/\, s_p > 1\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (contient P), elle possède donc un plus petit élément qu'on note p_n.

3° Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $p_n \geq 0$ et donc $a_n \geq n$, ainsi, par théorème d'encadrement des suites, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ et donc (a_n) diverge.

4° Pour la première on peut utiliser que si $k \in [\![1, n-1]\!]$ alors $\frac{1}{n+k} < \frac{1}{n}$, ainsi on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$, en rajoutant $\frac{1}{n}$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+k} < \frac{1}{n}+\frac{n-1}{n} = 1$.

Remarque : On met $\frac{1}{n}$ à part pour avoir des inégalités strictes. Pour la seconde, la même méthode ne permet pas de conclure, on va procéder par récurrence sur n (on peut aussi procéder par comparaison série/intégrale).

Montrons par récurrence sur $n \geq 2$, que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-2}\frac{1}{n+k} > 1$:

Initialisation : Pour $n=2$ on a $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}>1$, la propriété est donc initialisée.

Hérédité : On suppose la propriété vrai au rang n, ie on suppose $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-2}\frac{1}{n+k}>1$, et on veut la montrer au rang $n+1$, ie on cherche à montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{n+1+k}>1$.

On a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{n+1+k}=\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{n+k}=-\frac{1}{n}+\sum_{k=0}^{2n-2}\frac{1}{n+k}+\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n}$, ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence : $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{n+1+k}>-\frac{1}{n}+1+\frac{1}{3n-1}+\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n}=1-\frac{2}{3n}+\frac{6n}{9n^2-1}$.

Or $\frac{2}{3n}=\frac{6n}{9n^2}<\frac{6n}{9n^2-1}$ ainsi $-\frac{2}{3n}+\frac{6n}{9n^2-1}>0$, ce qui montre bien que $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{n+1+k}>1$ et termine l'hérédité.

Conclusion : On a donc : $\forall n\geq 2,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-2}\frac{1}{n+k}>1$.

5° Par définition de p_n on a $s_{p_n}>1$ et pour tout $p>p_n$ on a $s_p\geq s_{p_n}>1$ (par croissance de la suite). Ainsi $p\geq p_n \iff s_p>1$.
On a montré à la question précédente que $s_{n-1}<1<s_{2n-2}$, on a donc $n-1<p_n\leq 2n-1$, ainsi $\frac{2n-1}{n}\leq u_n\leq\frac{3n-1}{n}$, ainsi en passant à la limite (et en supposant que (u_n) converge vers ℓ) on a $2\leq\ell\leq 3$.

6° On remarque que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p_n}\frac{1}{n+k}=\sum_{k=n}^{a_n}\frac{1}{k}$ et que p_n est (par définition) le plus petit entier tel que cette somme soit strictement plus grand que 1, cela dit donc (comme déjà indiqué à la fin de la question 2°.b)) que $\displaystyle\sum_{k=n}^{a_n}\frac{1}{k}>1$, qui n'est rien d'autre que la première inégalité. Mais aussi que $\displaystyle\sum_{k=n}^{a_n-1}\frac{1}{k}\leq 1$, il suffit alors de rajouter $\frac{1}{a_n}$ pour obtenir la seconde inégalité.
On a bien montré $1<\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\leqslant 1+\frac{1}{a_n}$

7° La première et la dernière inégalités ont déjà été démontrées à la question précédente, il reste donc à démontrer : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{a_n}\frac{1}{k}\leq\int_n^{a_n}\frac{\mathrm{d}t}{t}\leq\sum_{k=n}^{a_n-1}\frac{1}{k}$.
Pour $k\in[\![n,a_n]\!]$, on a : $\forall t\in[k,k+1]$, $\frac{1}{k+1}\leq\frac{1}{t}\leq\frac{1}{k}$.
On intègre par rapport à t sur $[k,k+1]$ et on obtient $\frac{1}{k+1}\leq\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}\leq\frac{1}{k}$.
On somme pour k allant de n à a_n-1 et on obtient : $\displaystyle\sum_{k=n}^{a_n-1}\frac{1}{k+1}\leq\sum_{k=n}^{a_n-1}\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}\leq\sum_{k=n}^{a_n-1}\frac{1}{k}$.
On ré-indexe la première somme et on utilise la relation de Chasle sur la somme du milieu pour obtenir : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{a_n}\frac{1}{k}\leq\int_n^{a_n}\frac{\mathrm{d}t}{t}\leq\sum_{k=n}^{a_n-1}\frac{1}{k}$. On a donc les deux inégalités qui nous manquaient. On a bien montré que :

$$1-\frac{1}{n}\leq\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\leq\int_n^{a_n}\frac{\mathrm{d}t}{t}\leq\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{a_n-1}\leq 1.$$

8° Tout d'abord on remarque, pour $n\in\mathbb{N}^\star$, que $\displaystyle\int_n^{a_n}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln(a_n)-\ln(n)=\ln\left(\frac{a_n}{n}\right)=\ln(u_n)$.

Ainsi, d'après la question précédente, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, on a : $1-\dfrac{1}{n}\leq\ln(u_n)\leq 1$, le théorème des gendarmes permet d'en déduire que la suite $(\ln(u_n))$ converge vers 1, donc (par continuité de la fonction exponentielle) que la suite (u_n) converge vers e.