DS 3 : samedi 12 octobre

4h sans calculatrice

Le candidat numérotera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 *(le cours et ses méthodes)*.

1° Soit X et Y deux var indépendantes et de loi $\mathcal{G}(p)$ où $p \in]0,1[$.

(a) On pose $Z = \max(X, Y)$. Déterminer la loi de Z.

(b) Montrer que Z est d'espérance finie.

2° On considère une urne qui contient deux boules noires et une boule rouge dans laquelle on effectue une infinité de tirages successifs et avec remise. On définit E l'évènement « on obtient au moins une boule rouge ». On souhaite calculer $\mathbb{P}(E)$ par trois méthodes différentes, pour cela, on note pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, A_n l'évènement « on obtient la première boule rouge au n-ième tirage », B_n l'évènement « on obtient au moins une boule rouge au cours des n premiers tirages »et C_n l'évènement « on obtient n boules noires au cours des n premiers tirages ».

(a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\mathbb{P}(A_n)$, $\mathbb{P}(C_n)$ et $\mathbb{P}(B_n)$.

(b) Exprimer E à l'aide des évènements A_n, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et en déduire $\mathbb{P}(E)$.

(c) Exprimer E à l'aide des évènements B_n, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et en déduire $\mathbb{P}(E)$.

(d) Exprimer $\overline{E}$ à l'aide des évènements C_n, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et en déduire $\mathbb{P}(E)$.

(e) Que dire de l'évènement E ? Interpréter ce résultat.

Exercice 2 *(*E3A PSI*, 2022)*.

1° Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{3}{n(n+3)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+3}.$$

2° Déterminer le nombre réel α tel qu'il existe une variable aléatoire X à valeur dans $\mathbb{N}^\star$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \mathbb{P}(X = n) = \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\alpha.$$

3° **Espérance et variance de X.**

3°.1. Après avoir justifié son existence, déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X.
On pourra utiliser l'égalité : $2 = (n+3) - (n+1)$ afin d'introduire un télescopage.

3°.2. Déterminer $\mathbb{E}(X(X+1)$.

3°.3. En déduire la variance $\mathbb{V}(X)$ de la variable aléatoire X.

Exercice 3 *(Les urnes de Pólya,* CCP PC*, 2021)*.

On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

1. si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
2. si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.

Le premier objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n-ième tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du n-ième tirage dans un cas particulier.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n-ième tirage est blanche, 0 si la boule tirée au n-ième tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

On rappelle que si E et F sont deux événements avec $\mathbb{P}(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $\mathbb{P}(E|F)$ ou $\mathbb{P}_F(E)$) par : $\mathbb{P}(E|F) = \mathbb{P}_F(E) = \dfrac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)}$.

Partie I - Préliminaires

1° Déterminer la loi de X_1.

2° Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'événement $(X_1 = 1)$. En déduire la loi de X_2.

3° Soit $n \in \mathbb{N}$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

Partie II - La loi de X_n

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^\star$.

4° Pour tout $k \in [\![b, n+b]\!]$, calculer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | S_n = k)$.

5° A l'aide de la formule des probabilités totales, justifier que : $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \dfrac{\mathbb{E}(S_n)}{b+r+n}$.

6° Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Partie III - La loi de S_n dans un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^\star$.

7° Exprimer l'événement $(S_n = 1)$ avec les événements $(X_k = 0)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

8° Montrer que $\mathbb{P}(S_n = 1) = \frac{1}{n+1}$.

On admet dans la suite que l'on a de même $\mathbb{P}(S_n = n+1) = \frac{1}{n+1}$.

9° Soit $(k, \ell) \in [\![1, n+2]\!] \times [\![1, n+1]\!]$. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(S_{n+1} = k | S_n = \ell)$ dans chacun des trois cas suivants :

$$(i)\ \ell \notin \{k-1, k\}, \qquad (ii)\ \ell = k-1, \qquad (iii)\ \ell = k.$$

10° Montrer que pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, on a la relation : $\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \dfrac{k-1}{n+2}\mathbb{P}(S_n = k-1) + \dfrac{n+2-k}{n+2}\mathbb{P}(S_n = k)$.

11° Montrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

Exercice 4 *(Zêta alternée, d'après* CCP PSI, *Maths 1,* 2008*)*.

Pour tout réel x tel que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge, on pose : $\theta(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$.

Le but de l'exercice est le calcul de deux valeurs de la fonction θ et la valeur approchée d'une troisième valeur.

1° *Ensemble de définition de θ.*

(a) Pour quelles valeurs de x la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge t-elle absolument ?

(b) Pour quelles valeurs de x la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge t-elle ?

(c) Donner l'ensemble de définition de θ.

2° *Calcul de $\theta(1)$.*

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)^n \mathsf{d}t$.

(a) Calculer I_1.

(b) Donner, pour tout entier naturel n, la valeur de $I_n + I_{n+2}$.

(c) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est convergente et donner sa limite.

(d) Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} = I_1 + (-1)^{n+1} I_{2n+1}$.

(e) En déduire la valeur de $\theta(1)$.

3° *Calcul de $\theta(2)$.*

On admet que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que sa somme vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$.

(a) Justifier que les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ convergent et calculer leurs sommes.

(b) Justifier *proprement* que $\theta(2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2}$ et en déduire la valeur de $\theta(2)$.

4° *Valeur approchée de* $\theta(3)$*.*

Posons $\tilde{S} = \sum_{k=1}^{30} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3}$.

(a) Écrire un programme en langage Python donnant la valeur de $\tilde{S}$.

(b) Donner une majoration de l'erreur $|\theta(3) - \tilde{S}|$.

Exercice 5 ***(Étude d'une marche aléatoire,*** **CCP PC*, 2019*).**

On considère trois points distincts du plan nommés A, B et C. Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

1. le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n+1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n, plus précisément il ne dépend pas des positions occupées aux autres étapes précédentes ;
2. pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement "le pion se trouve en A à l'étape n", B_n l'événement "le pion se trouve en B à l'étape n" et C_n l'événement "le pion se trouve en C à l'étape n". On note également :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = P(A_n),\ q_n = P(B_n),\ r_n = P(C_n) \text{ et } V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix},$$

et on considère la matrice :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans le démontrer** le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que si E et F sont deux événements avec $P(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnnelle de E sachant F (notée $P(E|F)$ ou $P_F(E)$) par :

$$P(E|F) = P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

Partie I - Calcul des probabilités

1° Calculer les nombres p_n, q_n et r_n pour $n = 0$ et $n = 1$.

2° Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation $V_{n+1} = MV_n$.

3° En déduire que $V_n = M^n V_0$, puis une expression de p_n, q_n et r_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4° Déterminer les limites respectives des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter le résultat.

Partie II - Nombre moyen de passages en A

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note a_n le nombre moyen de passages du pion en A entre l'étape 1 et l'étape n et on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } A_n \text{ est réalisé,} \\ 0 & \text{si } \overline{A_n} \text{ est réalisé.} \end{cases}$$

5° Interpréter la variable aléatoire $X_1 + \ldots + X_n$ et le nombre $E(X_1 + \ldots + X_n)$.

6° Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

7° En déduire une expression de a_n.

Partie III - temps d'attente avant le premier passage en B

On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante :

1. si le pion ne passe jamais en B, on pose $T_B = 0$;
2. sinon, T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B.

Nous allons déterminer la loi de T_B et son espérance.

8° Calculer $P(T_B = 1)$ et $P(T_B = 2)$.

9° Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\overline{B_n}$ en fonction de A_n et C_n.

10° Établir que $P(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) = \frac{1}{4} P(\overline{B_2} \cap \overline{B_1})$, puis en déduire que $P(B_3 | \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) = \frac{1}{4}$.

Dans la suite, on donne la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad P\left(B_{n+1} | \bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k}\right) = \frac{1}{4}.$$

11° Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, calculer $P(T_B = k)$. Que vaut $P(T_B = 0)$?

12° Justifier que la variable aléatoire T_B admet une espérance. Quelle est l'espérance de T_B ?