DNS 2 : pour le vendredi 11 octobre

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1 *(Problème : Entropie au sens de Shannon).*

I. **Préliminaire**

I.A Représenter graphiquement la fonction logarithme népérien.

I.B Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\ln(x) \leq x - 1$ et que $\ln(x) = x - 1$ si et seulement si $x = 1$.

I.C Donner une interprétation graphique de ces deux résultats.

I.D Montrer que la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(0) = 0$ et $\forall x \in]0, 1]$, $g(x) = x\ln(x)$ est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1]$. Représenter graphiquement la fonction g.

On admet, pour tout $q \in]-1, 1[$, que la série $\sum nq^{n-1}$ converge absolument et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.

II. **Entropie d'une variable aléatoire**

II.A Dans cette sous-partie, toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur un même univers fini Ω et prennent leurs valeurs dans $[\![0, n]\!]$.
Si X est une telle variable, on note $p_k = \mathbb{P}(X = k)$. On définit l'entropie de X par :

$$H(X) = -\sum_{k=0}^{n} p_k \ln(p_k)$$

en convenant que $p_k \ln(p_k)$ vaut 0 lorsque $p_k = 0$.

II.A.1) Montrer que $H(X) \geq 0$ et que $H(X) = 0$ si et seulement si X est une variable aléatoire certaine, c'est-à-dire

$$\exists i \in [\![0, n]\!] \qquad \text{tel que} \qquad p_i = 1 \quad \text{et} \quad \forall j \neq i, \quad p_j = 0.$$

II.A.2) (a) X_0 est une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$. Calculer $H(X_0)$.

(b) En appliquant l'inégalité de la question I.B à un nombre réel x bien choisi, démontrer que

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \qquad -p_k \ln(p_k) + p_k \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} - p_k.$$

(c) En déduire que $H(X) \leq H(X_0)$ avec égalité si et seulement si X suit la même loi que X_0 (pour le cas d'égalité on pourra utiliser le cas d'égalité de la question I.B).

II.B Dans cette sous-partie, on s'intéresse à des variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P})$ et prenant leurs valeurs dans $\mathbb{N}^\star$. Si X est une telle variable pour laquelle $\mathbb{P}(X = k)$ est noté p_k, on dit qu'elle est d'entropie finie si la série $\sum p_k \ln(p_k)$ est absolument convergente et on définit alors son entropie par

$$H(X) = -\sum_{k=1}^{+\infty} p_k \ln(p_k)$$

en convenant à nouveau que $p_k \ln(p_k)$ vaut 0 lorsque $p_k = 0$.

II.B.1) Pour $p \in]0, 1[$, X_1 est une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.
Rappeler les valeurs de $\mathbb{P}(X_1 = k)$ et de l'espérance de X_1 (aucune démonstration n'est demandée).
Démontrer que X_1 est d'entropie finie et que $H(X_1) = -\dfrac{1-p}{p}\ln(1-p) - \ln(p)$.

II.B.2) Dans cette question et la suivante, X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$ d'espérance finie.
On note $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kp_k$. On se propose de démontrer que X est d'entropie finie.

(a) Quelle est la limite de p_k lorsque k tend vers $+\infty$?

(b) En déduire que $\lim\limits_{k\to+\infty} \sqrt{p_k}\ln(p_k) = 0$, puis qu'il existe un entier k_0 tel que $\forall k \geq k_0 \quad 0 \leq -\sqrt{p_k}\ln(p_k) \leq 1$.

(c) Soit $k \geq k_0$. Montrer que

— si $p_k \leq \dfrac{1}{k^3}$, alors $0 \leq -p_k\ln(p_k) \leq \dfrac{1}{k^{3/2}}$;

— si $p_k \geq \dfrac{1}{k^3}$, alors $0 \leq -p_k\ln(p_k) \leq 3p_k\ln(k)$.

(d) Soit $k \geq 1$. Justifier que $\ln(k) \leq k$, puis que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{k^{3/2}} + 3p_k\ln(k)\right)$ converge.

(e) Conclure.

II.B.3) Dans cette question, on suppose en plus que $\mathbb{E}(X) \leq 1/p$, p étant un réel de l'intervalle $]0,1[$. On veut montrer que $H(X) \leq H(X_1)$ (entropie d'une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p dont la valeur a été calculée à la question II.B.1).
Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, on note $p_k = \mathbb{P}(X = k)$ et $q_k = \mathbb{P}(X_1 = k)$.

(a) Justifier que la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)p_k$ converge et exprimer sa somme en fonction de $\mathbb{E}(X)$.

(b) Justifier la convergence de la série $\sum p_k\ln(q_k)$ et démontrer que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p_k\ln(q_k) = \ln(p) + (\mathbb{E}(X)-1)\ln(1-p).$$

(c) Démontrer que

$$-H(X_1) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} p_k\ln(q_k).$$

(d) En déduire que

$$H(X) - H(X_1) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} p_k\ln\left(\frac{q_k}{p_k}\right)$$

puis que

$$H(X) \leq H(X_1)$$

Indication : On pourra utiliser l'inégalité démontrée dans la question I.B.

Correction : d'après CENTRALE TSI, 2017

I. I.A

I.B Posons $f : x \mapsto \ln(x) - x + 1$, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$ et pour $x > 0$ on a $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$, ainsi f' est strictement positive sur $]0,1[$ et négative sur $]1,+\infty[$, on a donc que f' est strictement croissante sur $]0,1]$ et strictement décroissante sur $[1,+\infty[$, ainsi f admet un maximum en 1 qui est $f(1) = 0$, la stricte monotonie sur ces deux intervalles implique que f est strictement négative sur $\mathbb{R}_+^\star \setminus \{1\}$. Ce qui montre bien que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\ln(x) \leq x - 1$ et que $\ln(x) = x - 1$ si et seulement si $x = 1$.

I.C La courbe représentative de ln est en dessous de la droite d'équation $y = x - 1$ et ne la touche qu'au point de coordonnée $(1,0)$.

I.D Tout d'abord g est continue sur $]0,1]$ (propriété de ln), et par croissance comparée $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, ainsi g est continue sur $[0,1]$.
On a g dérivable sur $]0,1]$ et pour $x \in]0,1]$, $g'(x) = \ln(x) + 1$ ainsi g' est négative sur $]0,\frac{1}{\mathrm{e}}]$ et positive sur $[\frac{1}{\mathrm{e}},1]$, donc g est décroissante sur $]0,\frac{1}{\mathrm{e}}]$ et croissante sur $[\frac{1}{\mathrm{e}},1]$. De plus $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = -\infty$, donc la courbe représentative de g présente une tangente verticale au point d'abscisse 0 (horizontale au point d'abscisse $\frac{1}{\mathrm{e}}$ et de coefficient directeur 1 au point d'abscisse 1), avec en plus $g(0) = 0$, $g(1/e) = -1/e$ et $g(1) = 0$ on a tout pour tracer le graphe de g (on place ces trois points, les trois tangentes et on relie).

I.E (rajout) Tout d'abord remarquons que si on montre la convergence de $\sum nq^{n-1}$ pour $q \in [0,1[$ on aura la convergence absolue de $\sum nq^{n-1}$ pour $q \in]-1,1[$.
Pour $x \in]-1,1[$ et $n \in \mathbb{N}$, notons $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$, on a $S_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. La fonction S_n est dérivable sur $]-1,1[$ et pour $x \in]-1,1[$ on a, d'une part que $dsS_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ et d'autre part que $S_n'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x)-(1-x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{(1-x)^2}$. Ainsi la série $\sum nq^{n-1}$ converge (la convergence est

absolue d'après la remarque en début de question) et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$.

Remarque : Plus tard (dans le chapitre sur les Séries entières) on aura un théorème qui nous permettra d'affirmer directement que $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+1[$ et qu'on peut dériver terme à terme.

II. II.A II.A.1) Tout d'abord on remarque que $H(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} -g(p_k)$ (la valeur de g en 0 intègre la convention) et donc, comme g est définie sur $[0,1]$, que $H(X)$ est bien définie, de plus comme g est négative sur $[0,1]$ on a que $H(X) \geq 0$.
Ainsi (somme de nombres positifs) : $H(X) = 0$ si et seulement si pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $g(p_k) = 0$, en utilisant l'étude de g du préliminaire (g ne s'annule qu'en 0 ou 1) on a donc que : $H(X) = 0$ si et seulement si pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $p_k \in \{0,1\}$. Comme X est une variable aléatoire on a que la somme des p_k vaut 1.
On en déduit donc que si X est certaine alors $H(X) = 0$ et réciproquement que si $H(X) = 0$ alors tous les p_k valent 0 ou 1 et comme la somme des p_k vaut 1, que l'un des p_k vaut 1 et tous les autres valent 0 (si on veut vraiment être rigoureux : s'ils valent tous 0 alors la somme des p_k vaut 0 ce qui est interdit, et si plus que deux valent 1 alors la somme des p_k est plus grande que 2, ce qui est aussi illicite).

II.A.2) (a) Pour cette variable aléatoire on a, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $p_k = \frac{1}{n+1}$, ainsi $H(X_0) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = \ln(n+1)$.

(b) Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Si $p_k = 0$ alors l'inégalité est vérifiée, on suppose donc $p_k \neq 0$. On applique l'inégalité de I.B à $x = \frac{1}{(n+1)p_k}$ on a $\ln\left(\frac{1}{(n+1)p_k}\right) \leq \frac{1}{(n+1)p_k} - 1$. Comme $\ln\left(\frac{1}{(n+1)p_k}\right) = \ln\left(\frac{1}{(n+1)}\right) - \ln(p_k)$ et en multipliant l'inégalité par $p_k > 0$ on en déduit que $p_k\left(\ln\left(\frac{1}{(n+1)}\right) - \ln(p_k)\right) \leq \frac{1}{(n+1)} - p_k$, c'est-à-dire $-p_k\ln(p_k) + p_k \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} - p_k$.

(c) En sommant l'inégalité de la question précédente pour k allant de 0 à n on en déduit que $H(x) + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{n+1} - p_k\right)$. Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{n+1}\right)\sum_{k=0}^{n} p_k = \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\ln(n+1)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{n+1} - p_k\right) = 1 - 1 = 0$. On en déduit donc : $H(X) - \ln(n+1) \leq 0$ ie $H(X) \leq H(X_0)$.
Or, d'après le cas d'égalité de I.B, on a égalité si et seulement si, pour tout k, on a $\frac{1}{(n+1)p_k} = 1$, ie $p_k = \frac{1}{n+1}$, ce qui montre bien qu'on a égalité ssi X suit la même loi que X_0.

II.B II.B.1) On a $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^\star$ et, pour $k \in \mathbb{N}^\star$, $\mathbb{P}(X_1 = k) = (1-p)^{k-1}p$. De plus $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$.
Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, $p_k \ln(p_k) = (1-p)^{k-1}p\ln((1-p)^{k-1}p) = (1-p)^{k-1}p\left((k-1)\ln(1-p) + \ln(p)\right) = (k-1)(1-p)^{k-1}p\ln(1-p) + p\ln(p)(1-p)^{k-1}$.
On a donc, en posant $q = 1-p$, $p_k\ln(p_k) = \alpha(k-1)q^{k-2} + \beta q^{k-1}$ où $\alpha = qp\ln(q)$ et $\beta = p\ln(p)$.
Or, d'après la question I.E, $\sum(k-1)q^{k-2}$ converge absolument (il en va de même pour $\sum q^{k-1}$).
On en déduit donc que $\sum -p_k\ln(p_k)$ converge absolument, de plus : $H(X_1) = -\alpha\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)q^{k-2} - \beta\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} = -\alpha\sum_{k=0}^{+\infty} kq^k - \beta\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = -\alpha\frac{1}{(1-q)^2} - \beta\frac{1}{1-q} = -\frac{1-p}{p}\ln(1-p) - \ln(p)$.

II.B.2) (a) On sait que $\sum p_k$ converge (et sa somme vaut 1), donc $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} p_k = 0$.

(b) Par croissance comparée : $\sqrt{p_k}\ln(p_k) = 2\sqrt{p_k}\ln(\sqrt{p_k}) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ainsi par définition de la limite avec $\varepsilon = 1$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, $\left|\sqrt{p_k}\ln(p_k) - 0\right| \leq 1$, ie $-1 \leq \sqrt{p_k}\ln(p_k) \leq 1$, comme $\ln(p_k)$ est négatif, on en déduit que pour tout $k \geq k_0$, $0 \leq -\sqrt{p_k}\ln(p_k) \leq 1$.

(c) — si $p_k \leq \dfrac{1}{k^3}$, alors, en multipliant l'inégalité de la question précédente par $\sqrt{p_k}$, on a $0 \leq -p_k\ln(p_k) \leq \sqrt{p_k}$, et comme $\sqrt{p_k} \leq \frac{1}{k^{3/2}}$, on en déduit que $0 \leq -p_k\ln(p_k) \leq \dfrac{1}{k^{3/2}}$;

— si $p_k \geq \dfrac{1}{k^3}$, alors (croissance de ln) $\ln(p_k) \geq \ln\left(\frac{1}{k^3}\right) = -3\ln(k)$, ainsi $0 \leq -p_k\ln(p_k) \leq 3p_k\ln(k)$.

(d) Pour $k \geq 1$, d'après I.B, on a $\ln(k) \leq k-1 \leq k$, ainsi $3p_k\ln(k) \leq 3kp_k$, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum 3p_k\ln(p_k)$ converge (le membre de droite de la majoration est le terme général d'une série convergente puisque X est d'espérance finie), de plus on sait que la série de Riemann $\sum \frac{1}{k^{3/2}}$ de paramètre $3/2 > 1$ converge. On en déduit que que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{k^{3/2}} + 3p_k\ln(k)\right)$ converge.

(e) On a, d'après II.B.2.(c), pour $k \geq k_0$, $0 \leq -p_k\ln(p_k) \leq \frac{1}{k^{3/2}} + 3p_k\ln(k)$, le théorème de comparaison des séries à termes positifs et la question précédente permet d'en déduire que $\sum -p_k\ln(p_k)$ converge (et même absolument), ie que X est d'entropie finie.

II.B.3) (a) On sait que $\sum p_k$ converge (et sa somme vaut 1) et que $\sum kp_k$ converge (X est d'espérance finie, la somme de cette série vaut $\mathbb{E}(X)$). Ainsi la série $\sum(k-1)p_k$ converge et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)p_k = \sum_{k=1}^{+\infty}kp_k - \sum_{k=1}^{+\infty}p_k = \mathbb{E}(X) - 1$.

(b) Comme, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $q_k = p(1-p)^{k-1}$, on a $p_k\ln(q_k) = (k-1)p_k\ln(1-p) + p_k\ln(p)$. Or on sait que $\sum(k-1)p_k$ et $\sum p_k$ convergent, on en déduit donc que $\sum p_k\ln(q_k)$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}p_k\ln(q_k) = \ln(1-p)\sum_{k=1}^{+\infty}(k-1)p_k + \ln(p)\sum_{k=1}^{+\infty}p_k = \ln(1-p)(\mathbb{E}(X)-1) + \ln(p)$.

(c) Par hypothèse, $\mathbb{E}(X) - 1 \leq \frac{1}{p} - 1 = \frac{1-p}{p}$, ainsi ($\ln(1-p)$ négatif) : $\ln(1-p)(\mathbb{E}(X)-1) \geq \frac{1-p}{p}\ln(1-p)$, et donc $\ln(1-p)(\mathbb{E}(X)-1) + \ln(p) \geq \frac{1-p}{p}\ln(1-p) + \ln(p)$, ce qui montre (avec la question précédente et II.B.1) que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}p_k\ln(q_k) \geq -H(X_1)$.

(d) Par définition de $H(X)$ et en utilisant l'inégalité de la question précédente (et que toutes les sommes misent en jeu sont bien convergentes) : $\displaystyle H(X) - H(X_1) \leq \sum_{k=1}^{+\infty}p_k\ln(p_k) - \sum_{k=1}^{+\infty}p_k\ln(q_k) = \sum_{k=1}^{+\infty}p_k\ln\left(\frac{q_k}{p_k}\right)$.
Or, d'après la question I.B on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, $\ln\left(\frac{q_k}{p_k}\right)$, ainsi (les séries misent en jeu sont bien convergentes) : $\displaystyle H(X) - H(X_1) \leq \sum_{k=1}^{+\infty}q_k - p_k = 1 - 1 = 0$, ce qui montre bien que $H(X) \leq H(X_1)$.

Exercice 2 *(Fonction de répartition)*.
On étudie dans cet exercice la fonction de répartition d'une var X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Définition : La fonction de répartition de X est la fonction $F_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

1° Résultats généraux (X suit une loi discrète quelconque). Démontrer les assertions suivantes.

a) F_X est croissante.
b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}F_X(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}F_X(x) = 1$.
c) F_X est continue à droite en chaque réel.
d) F_X possède une limite à gauche et à droite en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\displaystyle\lim_{x\to x_0^+}F_X(x) - \lim_{x\to x_0^-}F_X(x) = \mathbb{P}(X = x_0)$.

2° Propriété fondamentale de la fonction de répartition.

a) Que dire de F_X et F_Y lorsque X et Y ont même loi ?
b) Montrer que $(F_X = F_Y)$ implique que X et Y ont même loi.

3° Une utilisation de la fonction de répartition : la loi du max de deux var indépendantes.

a) Soit X et Y deux var indépendantes sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On pose $Z = \max(X, Y)$. Démontrer que Z est une var.
b) Déterminer F_Z en fonction de F_X et F_Y.
c) Déterminer F_X puis F_Z et enfin la loi de Z lorsque $X \sim \mathcal{G}(p_1)$ et $Y \sim \mathcal{G}(p_2)$.

Correction :

1° a) Conséquence immédiate de la croissance de $\mathbb{P}$ par rapport à l'inclusion puisque $(x \leq y) \Rightarrow (X \leq x) \subset (X \leq y)$.

b) Tout d'abord l'existence de ces limites : d'après a) F_X est croissante et, comme est bornée puisqu'à valeurs dans $[0, 1]$, les limites de cette fonction existe par convergence monotone.
Pour le calcul on utilise le critère séquentiel : $\lim\limits_{+\infty} F_X = \lim\limits_{n\to+\infty} F_X(n)$. Or $(X \leq n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements donc, par continuité croissante, $\lim\limits_{n\to+\infty} F_X(n) = \mathbb{P}\left(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}(X \leq n)\right) = 1$ car $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}(X \leq n) = \Omega$.
Pour la limite en $-\infty$ on procède de même mais avec la suite décroissante des événements $(X \leq -n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer la continuité à droite de F_X en x_0 c'est justifier l'égalité $\lim\limits_{x\to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$.
On sait que $F_X(x_0^+)$ existe (car F_X est monotone et bornée), Ainsi de part le critère séquentiel $\left(F_X(x_0 + \frac{1}{n})\right)$ converge vers $F_X(x_0^+)$. Or la suite des événements $(X \leq x_0 + \frac{1}{n})$ est décroissante donc par continuité décroissante de $\mathbb{P}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X \leq x_0 + \dfrac{1}{n}) = \mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty}(X \leq x_0 + \dfrac{1}{n})\right)$ ie $\lim\limits_{n\to+\infty} F_X(x_0 + \dfrac{1}{n}) = \mathbb{P}(X \leq x_0)$.
D'où $\lim\limits_{x\to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$ ie F_X est continue à droite en x_0.
Conclusion : F_X est continue à droite en chaque réel.
Remarque : Si on note $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ avec $x_0 < x_1 < \dots$ (cas où le support est infini et minoré), on a F_X constante sur $[x_n, x_{n+1}]$, ainsi F_X est continue sur $\mathbb{R} \setminus X(\Omega)$ et est continue à droite avec limite à gauche en tout point de $\mathbb{R}$. Cette démonstration est cependant problématique si le support possède des points d'accumulations (par exemple en 0 dans le cas où $X(\Omega) = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^\star\}$).

d) Pour les mêmes raisons $F_X(x_0^-)$ existe et $F_X(x_0^-) = \lim\limits_{n\to+\infty} F_X(x_0 - \dfrac{1}{n})$.
Comme avant avec les suites des événements $(X \leq x_0 - \frac{1}{n})$ et $(X \leq x_0 + \frac{1}{n})$ qui sont respectivement croissantes et décroissantes pour avoir $\lim\limits_{x_0^+} F_X - \lim\limits_{x_0^-} F_X = \mathbb{P}(X \leq x_0) - \mathbb{P}(X < x_0)$ d'où la conclusion (remarque : on a $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}(X \leq x_0 - \dfrac{1}{n}) = (X < x_0)$).

2° a) Comme $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \displaystyle\sum_{k\in X(\Omega),\ k\leq x} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k\in Y(\Omega),\ k\leq x} \mathbb{P}(Y = k)$ car X et Y ont même loi, on a $F_X = F_Y$.

b) Conséquence de 2° d). Pour tout $x \in X(\Omega)$ on a $\mathbb{P}(X = x_0) = \mathbb{P}(Y = x_0)$, ce qui montre aussi que $X(\Omega) = Y(\Omega)$. Ainsi X et Y ont la même loi.
Conclusion (a) et (b) : La fonction de répartition caractérise la loi d'une VAR.

3° a) Il s'agit de montrer que pour tout $k \in Z(\Omega)$, $Z^{-1}(\{k\}) \in \mathcal{A}$ la tribu de l'espace probabilisé sur lequel on travaille.
Soit $k \in Z(\Omega)$, $Z^{-1}(\{k\}) = (Z = k) = (X = k \cap Y \leq k) \cup (X < k \cap Y = k)$. Comme $(X = k) = X^{-1}(\{k\})$ est un événement car X est une VAR et que $(Y \leq k) = \bigcup_{\ell\in Y(\Omega),\ \ell\leq k}(Y = \ell)$ est pour les mêmes raisons une union (au plus dénombrable) d'événements, on obtient $(X = k \cap Y \leq k) \in \mathcal{A}$. De même pour $(X < k \cap Y = k)$ et par stabilité par union il suit que $Z^{-1}(\{k\}) \in \mathcal{A}$.
Conclusion : $Z = \max(X, Y)$ est une VAR.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $(Z \leq x) = (\max(X, Y) \leq x) = ((X \leq x) \cap (Y \leq x))$ (double inclusion pour vous en convaincre si nécessaire).
Ainsi $F_Z(x) = F_X(x)F_Y(x)$ par indépendance de X et Y.
Conclusion : Si X et Y sont indépendantes alors $F_{\max(X,Y)} = F_X F_Y$.

c) D'après le travail fait avant on trouve que F_X est nulle sur $]-\infty, 1[$ puis que, pour tout $x \geq 1$:
$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{k=1}^{\lfloor x\rfloor} \mathbb{P}(X = k) = p_1 \frac{1 - q_1^{\lfloor x\rfloor}}{1 - q_1} = 1 - q_1^{\lfloor x\rfloor} \text{ avec } q_1 = 1 - p_1.$$
On peut se contenter de calculer F_Z sur $\mathbb{N}^* = Z(\Omega)$ pour déterminer la loi de Z. D'après b), de l'indépendance de X et Y suit $F_Z(k) = (1 - q_1^k)(1 - q_2^k)$. Comme $(Z = k) = (Z \leq k) \cap \overline{(X \leq k - 1)}$ car $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}$, on en déduit
$\mathbb{P}(Z = k) = F_Z(k) - F_Z(k-1) = 1 - q_1^k - q_2^k + (q_1q_2)^k - 1 + q_1^{k-1} + q_2^{k-1} - (q_1q_2)^{k-1} = p_1q_1^{k-1} + p_2q_2^{k-1} - (q_1q_2)^{k-1}(1 - q_1q_2)$.