DNS 3 : pour le lundi 4 novembre

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (i, j, k)$.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1° Quelle est l'image par f du vecteur $i + j - k$?

2° Démontrer que f est un projecteur puis déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$.

3° Quelle est la matrice de f relativement à une base adaptée à $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f)$?

Exercice 2.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P) = P(X) + P(X+1)$.

1° Montrer que φ est un automorphisme.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P_n(X) + P_n(X+1) = 2X^n$.

2° Dans cette question uniquement $n = 2$.

a) Donner la matrice canoniquement associée à φ. Retrouver alors que $\varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}_2[X])$.

b) Démontrer que $\mathrm{Vect}(Q)$ est une droite vectorielle stable par φ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(Q) = \lambda Q$.
En déduire les droites stables par φ par résolution de systèmes linéaires.

3° Justifier qu'on peut exprimer $P_n(X+1)$ comme combinaison linéaire de $P_0, \dots, P_n$.

4° En calculant de deux façons $P_n(X+2) + P_n(X+1)$ déterminer une relation donnant P_n en fonction de $P_0, \dots, P_{n-1}$.

Exercice 3 *(Noyaux itérés (d'après* E3A PSI*, 2007))***.**
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1° (a) Montrer pour tout entier naturel i et j, $\ker(u^i) \subset \ker(u^{i+j}$.

(b) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $t_m = \dim(\ker(u^m))$. Prouver l'existence de : $r = \inf\{m \in \mathbb{N},\ t_m = t_{m+1}\}$.

(c) Montrer que :

(i) Pour tout entier naturel m, tel que $m < r$, $\ker(u^m)$ est strictement inclus dans $\ker(u^{m+1})$.

(ii) $\ker(u^r) = \ker(u^{r+1})$.

(iii) Pour tout entier $m \geq r$, $\ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$.

2° Soit v un endomorphisme de E de rang $n-1$ tel que $u^n = 0$.

(a) Soit p et q deux entiers naturels et w la restriction de v^q à $\mathrm{Im}(v^p)$.

(i) Déterminer $\mathrm{Im}(w)$.

(ii) Prouver que $\ker(w) \subset \ker(v^q)$.

(iii) Vérifier alors que l'on a : $\dim(\ker(v^{p+q})) \leq \dim(\ker(v^p)) + \dim(\ker(v^q))$.

(iv) En déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dim(\ker(v^i)) \leq i$.

(v) Démontrer qu'en fait $\dim(\ker(v^i)) = i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

(b) Prouver que $v^{n-1} \neq 0$

(c) En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que $\mathcal{B} = \left(v^{n-1}(e), \dots, v(e), e\right)$ soit une base de E.

(d) Écrire la matrice de v dans cette base.