DNS $3^\star$: pour le lundi 4 novembre

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 *(Noyaux itérés (d'après* E3A PSI*, 2007)).*
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1° (a) Montrer pour tout entier naturel i et j, $\ker(u^i) \subset \ker(u^{i+j}$.

(b) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $t_m = \dim(\ker(u^m))$. Prouver l'existence de : $r = \inf\{m \in \mathbb{N},\ t_m = t_{m+1}\}$.

(c) Montrer que :

(i) Pour tout entier naturel m, tel que $m < r$, $\ker(u^m)$ est strictement inclus dans $\ker(u^{m+1})$.

(ii) $\ker(u^r) = \ker(u^{r+1})$.

(iii) Pour tout entier $m \geq r$, $\ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$.

2° Soit v un endomorphisme de E de rang $n-1$ tel que $u^n = 0$.

(a) Soit p et q deux entiers naturels et w la restriction de v^q à $\mathrm{Im}(v^p)$.

(i) Déterminer $\mathrm{Im}(w)$.

(ii) Prouver que $\ker(w) \subset \ker(v^q)$.

(iii) Vérifier alors que l'on a : $\dim(\ker(v^{p+q})) \leq \dim(\ker(v^p)) + \dim(\ker(v^q))$.

(iv) En déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dim(\ker(v^i)) \leq i$.

(v) Démontrer qu'en fait $\dim(\ker(v^i)) = i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

(b) Prouver que $v^{n-1} \neq 0$

(c) En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que $\mathcal{B} = \left(v^{n-1}(e), \ldots, v(e), e\right)$ soit une base de E.

(d) Écrire la matrice de v dans cette base.

Exercice 2 *(*Centrale PC*, Maths 2 partie I, 2016)* **Opérateur de translation et opérateur de différence.**

Dans tout le problème, $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.

Pour $a < b$ dans $\mathbb{Z}$, on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble $[a, b] \cap \mathbb{Z}$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k le polynôme X^{k-1}. On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ dont la famille $(P_k)_{k \in [\![1, n+1]\!]}$ est une base. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P et, lorsque P est non nul, $cd(P)$ désigne le coefficient dominant de P, c'est-à-dire le coefficient du monôme $X^{\deg(P)}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![0, k]\!]$, le coefficient binomial $\binom{k}{j}$ vaut $\dfrac{k!}{j!(k-j)!}$.

Pour un ensemble E et $f : E \to E$, on définit l'application $f^k : E \to E$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ de la façon suivante :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \text{ et } f^{k+1} = f \circ f^k$$

Si f est bijective, on note f^{-1} la réciproque de f et pour $k \in \mathbb{N}$, on note $f^{-k} = (f^{-1})^k$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille p.

A - L'opérateur de translation

L'opérateur de translation est l'endomorphisme τ de $\mathbb{R}_n[X]$ donné par :

$$\tau : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) \end{array}$$

A.1) Pour un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\tau(P))$ et $cd(\tau(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $cd(P)$.

A.2) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $\tau^k(P)$ en fonction de P.

A.3) Donner la matrice $M = (M_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$ de τ dans la base $(P_k)_{k \in [\![1, n+1]\!]}$. On exprimera les coefficients $M_{i,j}$ en fonction de i et j.

A.4) *(pour les* 5/2*)* Préciser l'ensemble des valeurs propres de τ. L'application τ est-elle diagonalisable ?

A.5) L'application τ est-elle bijective ? Si oui, préciser τ^{-1}. L'expression de τ^j trouvée à la question A2 pour $j \in \mathbb{N}$ est-elle valable pour $j \in \mathbb{Z}$?

A.6) Que vaut M^{-1} ? Exprimer les coefficients $(M^{-1})_{i,j}$ en fonction de i et j.

A.7) On se donne une suite réelle $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et on définit, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$

$$v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j \tag{1}$$

Déterminer une matrice $Q \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

A.8) En déduire la formule d'inversion : pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j \tag{2}$$

A.9) On considère un réel λ et la suite $(u_k = \lambda^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Quelle est la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la formule (1) ? Vérifier alors la formule (2).

B - L'opérateur de différence

L'opérateur de différence est l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\delta = \tau - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$:

$$\begin{array}{rcl} \delta \,:\, \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

B.1) Pour un polynôme non constant $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\delta(P))$ et $cd(\delta(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $cd(P)$.

B.2) En déduire le noyau $\ker(\delta)$ et $\mathrm{Im}(\delta)$ de l'endomorphisme δ.

B.3) Plus généralement, pour $j \in [\![1, n]\!]$, montrer les égalités suivantes :

$$\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X] \tag{3}$$

B.4) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\delta^k(P)$ en fonction des $\tau^j(P)$ pour $j \in [\![0, k]\!]$.

B.5) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que :

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0 \tag{4}$$

B.6) Dans cette question, on veut montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire $u \,:\, \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ telle que $u \circ u = \delta$. On suppose, par l'absurde, qu'une telle application u existe.

a) Montrer que u et δ^2 commutent.

b) En déduire que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par l'application u.

c) Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Conclure.

B.7) Dans cette question, on cherche tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par l'application δ.

a) Pour P polynôme non nul de degré $d \leqslant n$, montrer que la famille $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$ est libre. Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille ?

b) En déduire que si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et non réduit à $\{0\}$, il existe un entier $d \in [\![0, n]\!]$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$.