DS 3 : samedi 12 octobre

4h sans calculatrice

Le candidat numérotera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1 *(le cours et ses méthodes)*.
1° Soit X et Y deux var indépendantes et de loi $\mathcal{G}(p)$ où $p \in]0,1[$.

(a) On pose $Z = \max(X,Y)$. Déterminer la loi de Z.

(b) Montrer que Z est d'espérance finie.

2° On considère une urne qui contient deux boules noires et une boule rouge dans laquelle on effectue une infinité de tirages successifs et avec remise. On définit E l'évènement « on obtient au moins une boule rouge ». On souhaite calculer $\mathbb{P}(E)$ par trois méthodes différentes, pour cela, on note pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, A_n l'évènement « on obtient la première boule rouge au n-ième tirage », B_n l'évènement « on obtient au moins une boule rouge au cours des n premiers tirages »et C_n l'évènement « on obtient n boules noires au cours des n premiers tirages ».

(a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $\mathbb{P}(A_n)$, $\mathbb{P}(C_n)$ et $\mathbb{P}(B_n)$.

(b) Exprimer E à l'aide des évènements A_n, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et en déduire $\mathbb{P}(E)$.

(c) Exprimer E à l'aide des évènements B_n, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et en déduire $\mathbb{P}(E)$.

(d) Exprimer $\overline{E}$ à l'aide des évènements C_n, pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et en déduire $\mathbb{P}(E)$.

(e) Que dire de l'évènement E ? Interpréter ce résultat.

Correction :

1° On rappel tout d'abord que $X(\Omega) = [\![1,+\infty[\![$ et pour $k \in \mathbb{N}^\star$, $\mathbb{P}(X=k) = q^{k-1}p$

(a) Tout d'abord $Z(\Omega) = [\![1,+\infty[\![$, pour $k \in [\![1,+\infty[\![$ on remarque que $(Z \leq k) = (X \leq k) \cap (Y \leq k)$, ainsi $\mathbb{P}(Z \leq k) = \mathbb{P}(X \leq k)\mathbb{P}(Y \leq k)$ car X et Y sont indépendantes. Or $\mathbb{P}(X \leq k) = 1 - \mathbb{P}(X > k) = 1 - \displaystyle\sum_{l=k+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=l) = 1 - \sum_{l=k+1}^{+\infty} q^{l-1}p = 1 - \frac{p}{q}\sum_{l=k+1}^{+\infty} q^l = 1 - \frac{p}{q}q^{k+1}\frac{1}{1-q} = 1-q^k$. Ainsi $\mathbb{P}(Z \leq k) = (1-q^k)^2$.
Maintenant, comme Z est à valeurs dans $\mathbb{N}$ on a : $\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(Z \leq k) - \mathbb{P}(Z \leq k-1) = (1-q^k)^2 - (1-q^{k-1})^2$.
On peut remarquer que $\mathbb{P}(Z=k) = (q^{k-1} - q^{k-1})(2 - q^k - q^{k-1}) = (1-q)q^{k-1}(2-q^k-q^{k-1}) = pq^{k-1}(2-q^k-q^{k-1})$.
Autre méthode : On applique la FPT au SCE $(X=\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^\star}$ (et on utilise que $\mathbb{P}_{(X=\ell)}(Z=k) = 0$ si $\ell > k$) et on trouve : $\mathbb{P}(Z=k) = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=\ell)\mathbb{P}_{(X=\ell)}(\max(X,Y)=k) = \sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{P}(X=\ell)\mathbb{P}_{(X=\ell)}(\max(X,Y)=k)$. En séparant les cas $\ell = k$ (dans ce cas $\mathbb{P}_{(X=k)}(Z=k) = \mathbb{P}_{(X=k)}(Y \leq k)$) et $\ell < k$ (dans ce cas $\mathbb{P}_{(X=\ell)}(Z=k) = \mathbb{P}_{(X=\ell)}(Y=k)$) et en utilisant l'indépendance de X et de Y : $\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y \leq k) + \displaystyle\sum_{\ell=1}^{k-1} \mathbb{P}(X=\ell)\mathbb{P}(Y=k) = pq^{k-1}(1-q^k) + \sum_{\ell=1}^{k-1} pq^{\ell-1}pq^{k-1} = pq^{k-1}(1-q^k) + p^2q^{k-1}\frac{1-q^{k-1}}{1-q} = pq^{k-1}(2-q^k-q^{k-1})$.
Encore une autre méthode : On remarque ici que $(\max(X,Y)=k) = (X=k) \cap (Y \leq k) \bigcup (X<k) \cap (y=k)$ (attention aux $\leq$ et $<$: de cette manière la réunion est disjointe). On a, pour $k \in \mathbb{N}^\star$, ainsi (réunion disjointe et intersection d'évènements indépendants) : $\mathbb{P}(Z=k) = \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y \leq k) + \mathbb{P}(X<k)\mathbb{P}(Y=k)$.
Ainsi $\mathbb{P}(Z=k) = pq^{k-1}(1-q^k) + (1-q^{k-1})pq^{k-1} = pq^{k-1}(2-q^k-q^{k-1})$ (plus rapide que la première méthode car les calculs de $\mathbb{P}(Y \leq k)$ et $\mathbb{P}(X<k)$ ne sont pas détaillés).

(b) On sais que X et Y sont d'espérance finie, il en va de même pour $X+Y$, or $Z \leq X+Y$ ce qui permet de conclure.
Pour être plus rigoureux $(Z \geq n) \subset (X+Y \geq n)$ ainsi $0 \leq \mathbb{P}(Z \geq n) \leq \mathbb{P}(X+Y \geq n)$, or $\mathbb{P}(X+Y \geq n)$ est le terme général d'une série convergente (car $X+Y$ d'espérance finie), donc $\sum \mathbb{P}(Z \geq n)$ converge ie. (résultat du cours) Z est d'espérance finie.

2° Notons, pour $i \in \mathbb{N}^\star$, R_i l'évènement « on obtient une boule rouge au n-ième tirage ». Ainsi pour tout k on a $\mathbb{P}(R_k) = \frac{1}{3}$

(a) On a $A_n = \overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap \ldots \cap \overline{R_{n-1}} \cap R_n$, donc, par indépendance des évènements, on a $\mathbb{P}(A_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \frac{1}{3}$.
L'évènement C_n est l'intersection des $\overline{R_k}$ pour k de 1 à n, on a donc $\mathbb{P}(C_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Comme $B_n = \overline{C_n}$ on a $\mathbb{P}(B_n) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

(b) On a $E = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$, or les évènements A_n sont deux à deux incompatibles, d'où, par σ-additivité, on a
$$\mathbb{P}(E) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1.$$

(c) On a $E = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $B_n \subset B_{n+1}$, la suite (B_n) est une suite croissante d'évènements, ainsi par continuité croissante $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(B_n) = \lim_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1$ (car $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$).

(d) L'évènement $\overline{E}$ est l'évènement « on obtient que des boules vertes », ainsi $\overline{E} = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n$, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $C_{n+1} \subset C_n$, la suite (C_n) est une suite décroissante d'évènement, d'où, par continuité décroissante, on a $\mathbb{P}(\overline{E}) = \mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty} C_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(C_n) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ (car $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$). d'où $\mathbb{P}(E) = 1$.

(e) L'évènement E est presque sûr, on est presque sûr d'obtenir, au moins une fois, une boule rouge.

Exercice 2 *(*E3A PSI*, 2022)*.

1° Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout entier naturel n non nul, on a :
$$\frac{3}{n(n+3)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+3}.$$

2° Déterminer le nombre réel α tel qu'il existe une variable aléatoire X à valeur dans $\mathbb{N}^\star$ vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \mathbb{P}(X=n) = \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\alpha.$$

3° **Espérance et variance de** X.

3°.1. Après avoir justifié son existence, déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X.
On pourra utiliser l'égalité : $2 = (n+3) - (n+1)$ *afin d'introduire un télescopage.*

3°.2. Déterminer $\mathbb{E}(X(X+1))$.

3°.3. En déduire la variance $\mathbb{V}(X)$ de la variable aléatoire X.

Correction :

1° Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} = \frac{3}{n(n+3)}$, ainsi $a = 1$ et $b = -1$ conviennent.

2° Notons, pour $n \geq 1$, $p_n = \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\alpha$, on remarque, en utilisant la question 1°, que $p_n = \alpha\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)\frac{1}{(n+1)(n+2}} = \alpha\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right)$. Soit $N \in \mathbb{N}^\star$, on a (somme télescopique) :
$$\sum_{n=1}^{N} p_n = \alpha \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \alpha\left(\frac{1}{6} - \frac{3}{(N+1)(N+2)(N+3)}\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\alpha}{6},$$ ainsi on doit avoir $\alpha = 6$, et dans ce cas on a bien pour tout $n \geq 1$, $p_n \geq 0$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$.

3° 3°.1. On a $np_n = \frac{18}{(n+1)(n+2)(n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{18}{n^3}$, ainsi $\sum np_n$ converge et on a donc l'existence de l'espérance de X. De plus on a, pour $n \geq 1$, que $np_n = 9\left(\frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+2)(n+3)}\right)$, ainsi, pour $N \geq 1$, on a $\sum_{n=1}^{N} np_n = 9\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{(N+2)(N+3)}\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$. Ce qui montre que $\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}$.

3°.2. Tout d'abord, $n(n+1)p_n = \frac{18}{(n+2)(n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{18}{n^2} \geq 0$, ainsi $\sum n(n+1)p_n$ converge absolument et d'après la formule de transfert $X(X+1)$ est d'espérance finie et $\mathbb{E}(X(X+1) = 18\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)} = 18\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} = \frac{18}{3} = 6$.

3°.3. On en déduit que $X^2 = X(X+1) - X$ est d'espérance finie et que $\mathbb{E}(X^2) = 6 - \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$. En utilisant la formule de Konïng-Huygens, on a donc $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{9}{4}$.

Exercice 3 *(Les urnes de Pólya,* CCP PC, *2021).*
On fixe un couple d'entiers $(b, r) \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et de boules rouges et on considère une urne contenant initialement b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant :

1. si la boule tirée est de couleur blanche, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule blanche supplémentaire ;
2. si la boule tirée est de couleur rouge, on la replace dans l'urne et on ajoute une boule rouge supplémentaire.

Le premier objectif de cet exercice est de calculer la probabilité de tirer une boule blanche lors du n-ième tirage. Le second objectif est de déterminer la loi du nombre de boules blanches se trouvant dans l'urne à l'issue du n-ième tirage dans un cas particulier.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on désigne par X_n la variable aléatoire égale à 1 si la boule tirée au n-ième tirage est blanche, 0 si la boule tirée au n-ième tirage est rouge. On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad S_n = b + \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

On rappelle que si E et F sont deux événements avec $\mathbb{P}(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle de E sachant F (notée $\mathbb{P}(E|F)$ ou $\mathbb{P}_F(E)$) par : $\mathbb{P}(E|F) = \mathbb{P}_F(E) = \dfrac{\mathbb{P}(E \cap F)}{\mathbb{P}(F)}$.

Partie I - Préliminaires

1° Déterminer la loi de X_1.

2° Déterminer la loi conditionnelle de X_2 sachant l'événement $(X_1 = 1)$. En déduire la loi de X_2.

3° Soit $n \in \mathbb{N}$. Que représente la variable aléatoire S_n ? Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire S_n ?

Correction :

1° On note, pour tout $i \in \mathbb{N}^\star$, R_i l'évènement « on a tiré une boule rouge au i-ième tirage », et B_i pour une boule blanche.
On a $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$, on a aussi : $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(B_1) = \frac{b}{b+r}$ et $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(R_1) = \frac{r}{b+r}$.
Dit autrement X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$.

2° Si l'évènement $(X_1 = 1)$ est réalisé alors on a tiré une boule blanche au premier tirage, ainsi l'urne contient $b+1$ boules blanches et r boules rouges. On en déduit donc que $\mathbb{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 1) = \frac{b+1}{b+r+1}$ et $\mathbb{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 0) = \frac{r}{b+r+1}$.
De même on a : $\mathbb{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 1) = \frac{b}{b+r+1}$ et $\mathbb{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 0) = \frac{r+1}{b+r+1}$.
On a $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$, d'après la formule des probabilités totales (FPT) avec le système complet d'évènements (SCE) $((X_1 = 0), (X_1 = 1))$ on en déduit que : $\mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}_{(X_1=0)}(X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 1) = \frac{r}{b+r}\frac{b}{b+r+1} + \frac{b}{b+r}\frac{b+1}{b+r+1} = \frac{b(r+b+1))}{(b+r)(b+r+1)} = \frac{b}{b+r}$ et on a $\mathbb{P}(X_2 = 0) = 1 - \mathbb{P}(X_2 = 1) = \frac{r}{r+b}$.
Dit autrement X_2 suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$.

3° S_n correspond au nombre de boule blanche dans l'urne après le n-ième tirage, comme il y a toujours au moins une boule blanche et une boule rouge on a $S_n(\Omega) = [\![b, b+n]\!]$.

Partie II - La loi de X_n

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^\star$.

4° Pour tout $k \in [\![b, n+b]\!]$, calculer $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1|S_n = k)$.

5° A l'aide de la formule des probabilités totales, justifier que : $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \dfrac{\mathbb{E}(S_n)}{b+r+n}$.

6° Montrer par récurrence que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$.

Correction :

4° Comme sachant $(S_n = k)$ l'urne contient k boules blanches parmi ses $b + r + n$ boules, on en déduit que : $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1|S_n = k) = \frac{k}{b+r+n}$.

5° Appliquons la FPT avec le SCE $(S_n = k)_{b \leq k \leq b+n}$: $P(X_{n+1} = 1) = \displaystyle\sum_{k=b}^{b+n} \mathbb{P}(S_n = k)\mathbb{P}(X_{n+1} = 1|S_n = k) = \sum_{k=b}^{b+n} \mathbb{P}(S_n = k)\frac{k}{b+r+n} = \frac{k}{b+r+n}\sum_{k=b}^{b+n} k\mathbb{P}(S_n = k) = \frac{E(S_n)}{b+r+n}$.

6° Montrons par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^\star$ que X_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$.
Initialisation : Déjà fait en 1° pour $n = 1$ (et aussi pour $n = 2$ en 2°).
Hérédité : On suppose que X_k suit la la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, montrons que c'est encore le cas pour X_{n+1}.
On a bien $X_{n+1}(\Omega) = \{0, 1\}$, ainsi X_{n+1} suit la loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1)$. Avec la question précédente et la linéarité de l'espérance on a : $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \dfrac{\mathbb{E}(S_n)}{b+r+n} = \dfrac{1}{b+r+n}\left(b + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)\right)$.
Par hypothèse de récurrence on a, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, que $\mathbb{E}(X_k) = \frac{b}{b+r}$, ainsi $\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \dfrac{1}{b+r+n}\left(b + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{b}{b+r}\right) = \dfrac{1}{b+r+n}\left(b + \dfrac{bn}{b+r}\right) = \dfrac{1}{b+r+n}\dfrac{b(b+r+n)}{b+r} = \dfrac{b}{b+r}$. Ainsi X_{n+1} suit bien la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{b}{b+r}$, ce qui termine l'hérédité et la récurrence.
On a bien montré : $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $X_n \sim \mathcal{B}(\frac{b}{b+r})$.

Partie III - La loi de S_n dans un cas particulier

Dans cette partie uniquement, on suppose que $b = r = 1$ et on considère un entier $n \in \mathbb{N}^\star$.

7° Exprimer l'événement $(S_n = 1)$ avec les événements $(X_k = 0)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.

8° Montrer que $\mathbb{P}(S_n = 1) = \frac{1}{n+1}$.

On admet dans la suite que l'on a de même $\mathbb{P}(S_n = n + 1) = \frac{1}{n+1}$.

9° Soit $(k, \ell) \in [\![1, n+2]\!] \times [\![1, n+1]\!]$. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(S_{n+1} = k|S_n = \ell)$ dans chacun des trois cas suivants :

$$(i)\ \ell \notin \{k-1, k\}, \qquad (ii)\ \ell = k-1, \qquad (iii)\ \ell = k.$$

10° Montrer que pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, on a la relation : $\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \dfrac{k-1}{n+2}\mathbb{P}(S_n = k-1) + \dfrac{n+2-k}{n+2}\mathbb{P}(S_n = k)$.

11° Montrer par récurrence que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.

Correction :

7° L'évènement $(S_n = 1)$ correspond à « on a tiré que des boules rouges pendant les n premiers tirages », en effet on a : $S_n = 1 \iff 1 + \sum_{k=1}^{n} X_k = 1 \iff \forall k \in [\![1, n]\!]$.
Ainsi $(S_n = 1) = (X_1 = 0) \cap \ldots \cap (X_n = 0)$.

8° D'après la formule des probabilités composées : $\mathbb{P}(S_n = 1) = \mathbb{P}((X_1 = 0) \cap \ldots \cap (X_n = 0)) = \mathbb{P}(X_1 = 0)\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}_{(X_1=0)\cap\ldots\cap(X_k=0)}(X_{k+1} = 0)$. Or, pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ si $(X_1 = 0) \cap \ldots \cap (X_k = 0)$ est réalisé, alors au $(k+1)$-ième tirage il y a 1 boule blanche et $1 + k$ boules rouges, ainsi $\mathbb{P}_{(X_1=0)\cap\ldots\cap(X_k=0)}(X_{k+1} = 0) = \dfrac{1+k}{2+k}$.
On en déduit donc que $\mathbb{P}(S_n = 1) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1+k}{2+k} = \frac{1}{2}\frac{1+1}{2+n-1} = \frac{1}{n+1}$ (par produit télescopique).

9° On a que $S_{n+1} - S_n = X_{n+1}$, ainsi si S_{n+1} vaut k alors nécessairement S_n vaut k ou $k-1$, ainsi dans le cas (i) où $\ell \notin \{k-1, k\}$ on a $\mathbb{P}(S_{n+1} = k | S_n = \ell) = 0$.
Dans le cas (ii) : $\mathbb{P}(S_{n+1} = k | S_n = k-1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | S_n = k-1) = \frac{k-1}{2+n}$ car si l'évènement $(S_n = k-1)$ est réalisé alors, pour le $(n+1)$-ième tirage il y a k boules blanches sur les $2+n$ boules de l'urne. On notera que dans ce cas on a nécessairement $k \geq 2$.
De même dans le cas (iii), on a : $\mathbb{P}(S_{n+1} = k | S_n = k) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | S_n = k-1) = \frac{2+n-k}{2+n}$.

10° D'après la FPT avec le SCE $(S_n = \ell)_{1 \leq \ell \leq n}$ on a : $\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \mathbb{P}(S_n = \ell)\mathbb{P}_{(S_n=\ell)}(S_{n+1} = k)$, d'après la question précédente il n'y a que les termes de la somme pour $\ell = k$ et $\ell = k-1$ qui sont non nuls, ainsi $\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \mathbb{P}(S_n = k-1)\mathbb{P}_{(S_n=k-1)}(S_{n+1} = k) + \mathbb{P}(S_n = k)\mathbb{P}_{(S_n=k)}(S_{n+1} = k) = \dfrac{k-1}{n+2}\mathbb{P}(S_n = k-1) + \dfrac{n+2-k}{n+2}\mathbb{P}(S_n = k)$.

11° Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^\star$ que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.
Initialisation : Pour $n = 1$, on a $S_1 = 1 + X_1$ ainsi $S_1(\Omega) = [\![1, 2]\!]$ et $\mathbb{P}(S_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 0) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(S_1 = 2) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{1}{2}$, donc X_1 suit bien la loi uniforme sur $[\![1, 2]\!]$.
Hérédité : Supposons que S_n suit la loi uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$, montrons que S_{n+1} suit la loi uniforme sur $[\![1, n+2]\!]$.
On sait déjà (question 3°) que $S_n(\Omega) = [\![1, n+2]\!]$, on a aussi montré (en question 8°) que $\mathbb{P}(S_{n+1} = 1) = \frac{1}{n+2}$ et l'énoncé nous à fait admettre que $\mathbb{P}(S_{n+1} = n+2) = \frac{1}{n+2}$. Il reste donc à calculer $\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \frac{1}{n+2}$ pour $k \in [\![2, n+1]\!]$. D'après la question précédente (et l'hypothèse de récurrence) on a : $\mathbb{P}(S_{n+1} = k) = \dfrac{k-1}{n+2}\mathbb{P}(S_n = k-1) + \dfrac{n+2-k}{n+2}\mathbb{P}(S_n = k) = \dfrac{k-1}{n+2}\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{n+2-k}{n+2}\dfrac{1}{n+1} = \dfrac{n+1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n+2}$. Ce qui termine de montrer que S_{n+1} suit la loi uniforme sur $[\![1, n+2]\!]$.
On a bien montré, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, que $S_n \sim \mathcal{U}([\![1, n+1]\!])$.

Exercice 4 *(Zêta alternée, d'après* CCP PSI, *Maths 1,* 2008*)*.

Pour tout réel x tel que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge, on pose : $\theta(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$.
Le but de l'exercice est le calcul de deux valeurs de la fonction θ et la valeur approchée d'une troisième valeur.

1° *Ensemble de définition de θ.*

(a) Pour quelles valeurs de x la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge t-elle absolument ?

(b) Pour quelles valeurs de x la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge t-elle ?

(c) Donner l'ensemble de définition de θ.

2° *Calcul de $\theta(1)$.*

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)^n \mathrm{d}t$.

(a) Calculer I_1.
(b) Donner, pour tout entier naturel n, la valeur de $I_n + I_{n+2}$.
(c) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est convergente et donner sa limite.
(d) Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} = I_1 + (-1)^{n+1} I_{2n+1}$.
(e) En déduire la valeur de $\theta(1)$.

3° *Calcul de $\theta(2)$.*

On admet que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que sa somme vaut $\dfrac{\pi^2}{6}$.

(a) Justifier que les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n)^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$ convergent et calculer leurs sommes.

(b) Justifier *proprement* que $\theta(2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2}$ et en déduire la valeur de $\theta(2)$.

4° *Valeur approchée de $\theta(3)$.*

Posons $\tilde{S} = \displaystyle\sum_{k=1}^{30} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3}$.

(a) Écrire un programme en langage Python donnant la valeur de $\tilde{S}$.

(b) Donner une majoration de l'erreur $|\theta(3) - \tilde{S}|$.

Correction :

1° (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$, on a : $\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}\right| = \dfrac{1}{n^x}$ et ce terme est le terme général d'une série de Riemann qui converge si et seulement si $x > 1$. Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge absolument si et seulement si $x > 1$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Distinguons trois cas :

— Si $x < 0$, on a : $\left|\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^x}\right| = \dfrac{1}{n^x} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ donc le terme général de la série ne peut pas converger vers 0 et ainsi la série diverge grossièrement.

— Si $x = 0$, la série a pour terme général 1 qui ne tend pas vers 0 donc la série diverge grossièrement.

— Si $x > 0$. La série est alternée : la suite de terme général $\frac{1}{n^x}$ est décroissante, positive et converge vers 0. D'après le critère spécial des séries alternées, la série est alors convergente.

Ainsi, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge si et seulement si $x > 0$.

(c) D'après la question précédente, θ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$

2° (a) On a : $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)\mathsf{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\mathsf{d}t = \Big[-\ln(|\cos(t)|)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\ln(2)}{2}$.

Ainsi, $I_1 = \dfrac{\ln(2)}{2}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $I_n + I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)^n\mathsf{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)^{n+2}\mathsf{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)^n + \tan(t)^{n+2}\mathsf{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t)^n(1+\tan(t)^2)\mathsf{d}t = \left[\frac{\tan(t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\tan(\frac{\pi}{4})^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$

(c) La suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est positive : chacun de ses termes est l'intégrale (avec les bornes dans le bon sens d'une fonction continue positive). On a donc pour tout $n \geq 0$, $0 \leq I_n \leq I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$. Or on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. Donc par théorème d'encadrement, la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ converge et on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Alternative : Pour $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ on a $0 \leq \tan(t) \leq 1$, donc pour $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq \tan^{n+1}(t) \leq \tan^n(t)$, ainsi (croissante de l'intégrale) on a : $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$, ainsi (I_n) est décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers un certain $\ell \in \mathbb{R}_+$, en passant à la limite l'égalité de la question précédente on en déduit que $2\ell = 0$, ie que $\ell = 0$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1+1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}(I_{2k-1} + I_{2k+1}) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}I_{2k-1} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}I_{2k+1}$.

On procède à un changement d'indice $j = k-1$ dans la deuxième somme, ce qui donne : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}I_{2k-1} + \sum_{j=2}^{n+1}(-1)^{j}I_{2j-1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}I_{2k-1} - \sum_{j=2}^{n+1}(-1)^{j+1}I_{2j-1} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}I_{2k-1} - \sum_{k=2}^{n+1}(-1)^{k+1}I_{2k-1} = I_1 - (-1)^{n+2}I_{2n+1}$.

Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} = I_1 + (-1)^{n+1}I_{2n+1}$.

Alternative : On peut aussi procéder par récurrence.

Alternative : Pour $n \in \mathbb{N}$, d'après 2(b) : $I_{2n+1} = \frac{1}{2n} - I_{2n-1} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-2} + I_{2n-3} = \dots$.

(e) On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{2n+1} = 0$ et ainsi d'après la question précédente (en remarquant que le produit d'une suite convergente vers 0 et une suite bornée est une suite convergente vers 0) : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k+1}}{2k} = I_1 = \dfrac{\ln(2)}{2}$ puis $\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} = \dfrac{\ln(2)}{2}$ et donc : $\theta(1) = \ln(2)$.

3° **Remarque** : Attention : ce n'est pas parce que $\sum u_n$ converge qu'il en va de même pour $\sum u_{2n}$ et $\sum u_{2n+1}$, pour s'en convaincre il suffit de considérer, pour $n \in \mathbb{N}^\star$: $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$: $\sum u_n$ converge (TSA), pourtant $\sum u_{2p}$ diverge (car $u_{2p} = \frac{1}{2p}$).
Ici on va démontrer la convergence des trois séries, puis passer par des sommes partielles. Pour éviter des problèmes d'écriture (ie éviter des sommes de 1 à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$), on va utiliser que si $\left(\sum\limits_{k=1}^{N} u_k\right)_N$ converge alors $\left(\sum\limits_{k=1}^{2N+1} u_k\right)_N$ converge vers la même limite.

(a) Pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{1}{(2n)^2} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{n^2}$ et on reconnait (à constante multiplicative près) le terme général d'une série de Riemann convergente donc : la série $\sum\limits_{n\geq1} \dfrac{1}{(2n)^2}$ converge.

On a : $\dfrac{1}{(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{4n^2}$. La série $\sum\limits_{n\geq1} \dfrac{1}{4n^2}$ est convergente (justifier juste avant) et à termes positifs donc par critère de comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum\limits_{n\geq0} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ converge.

Calculons les deux sommes :

— On a par linéarité : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2k)^2} = \dfrac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{\pi^2}{6} = \dfrac{\pi^2}{24}$.

— Justifions l'égalité suivante : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2k)^2} + \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$.

Soit $N \geq 1$. On a : $\sum\limits_{n=1}^{2N+1} \dfrac{1}{n^2} = \sum\limits_{\substack{n=1\\ n \text{ pair}}}^{2N+1} \dfrac{1}{n^2} + \sum\limits_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{2N+1} \dfrac{1}{n^2} = \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{1}{(2k)^2} + \sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{1}{(2k+1)^2}$.

Le résultat s'obtient par passage à la limite (licite car nous avons montré que les séries associées à ces sommes partielles sont convergentes). Ainsi, l'égalité nous donne : $\dfrac{\pi^2}{24} + \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$ et donc : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$.

Finalement, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2k)^2} = \dfrac{\pi^2}{24}$ et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$

(b) Soit $N \geq 1$. On a : $\sum\limits_{n=1}^{2N+1} \dfrac{(-1)^n}{n^2} = \sum\limits_{\substack{n=1\\ n \text{ pair}}}^{2N+1} \dfrac{(-1)^n}{n^2} + \sum\limits_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{2N+1} \dfrac{(-1)^n}{n^2} = \sum\limits_{\substack{n=1\\ n \text{ pair}}}^{2N+1} \dfrac{1}{n^2} - \sum\limits_{\substack{n=1\\ n \text{ impair}}}^{2N+1} \dfrac{1}{n^2} = \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{1}{(2k)^2} - \sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{1}{(2k+1)^2}$.

Par passage à la limite quand N tend vers $+\infty$ (licite car nous avons montré que toutes les séries associées à ces sommes partielles sont convergentes), on a : $\theta(2) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2} - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2k)^2}$.

D'après la question précédente, on a alors : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^2} - \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2k)^2} = \dfrac{\pi^2}{8} - \dfrac{\pi^2}{24} = \dfrac{\pi^2}{12}$.

Ainsi, $\theta(2) = \dfrac{\pi^2}{12}$.

4° (a) Voici une proposition :

```
S=0
for i in range(1,31):
```

```
S+=(-1)**(i+1)/i**3
```

(b) On a : $\theta(3) - \tilde{S} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} - \sum_{k=1}^{30} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} = \sum_{k=31}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3} = R_{30}$ où R_{30} est le reste partiel d'ordre 30. On a montré que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}$ vérifiait le critère spécial des séries alternées donc R_{30} est du signe de : $\frac{(-1)^{31+1}}{31^3} = \frac{1}{31^3} \geq 0$ et on a : $R_{30} \leq \frac{1}{31^3}$. Sachant que : $|\theta(3) - \tilde{S}| = |R_{30}| = R_{30}$ on a donc : $|\theta(3) - \tilde{S}| \leq \frac{1}{31^3}$.

Exercice 5 *(Étude d'une marche aléatoire,* CCP PC*, 2019)***.**
On considère trois points distincts du plan nommés A, B et C. Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.
A l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve sur le point A. Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

1. le mouvement du pion de l'étape n à l'étape $n + 1$ ne dépend que de la position du pion à l'étape n, plus précisément il ne dépend pas des positions occupées aux autres étapes précédentes ;
2. pour passer de l'étape n à l'étape $n+1$, on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement "le pion se trouve en A à l'étape n", B_n l'événement "le pion se trouve en B à l'étape n" et C_n l'événement "le pion se trouve en C à l'étape n". On note également :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = P(A_n),\ q_n = P(B_n),\ r_n = P(C_n) \text{ et } V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix},$$

et on considère la matrice :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans le démontrer** le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = \frac{1}{3\cdot 4^n}\begin{pmatrix} 4^n+2 & 4^n-1 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n+2 & 4^n-1 \\ 4^n-1 & 4^n-1 & 4^n+2 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que si E et F sont deux événements avec $P(F) > 0$, on définit la probabilité conditionnnelle de E sachant F (notée $P(E|F)$ ou $P_F(E)$) par :

$$P(E|F) = P_F(E) = \frac{P(E\cap F)}{P(F)}.$$

Partie I - Calcul des probabilités

1° Calculer les nombres p_n, q_n et r_n pour $n = 0$ et $n = 1$.

2° Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la relation $V_{n+1} = MV_n$.

3° En déduire que $V_n = M^n V_0$, puis une expression de p_n, q_n et r_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4° Déterminer les limites respectives des suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter le résultat.

Correction :

1° Comme à l'instant $n = 0$ le pion est en A on a $p_0 = 1$, $q_0 = r_0 = 0$. On a $p_1 = P(A_1) = P(A_0 \cap A_1) = P(A_0)P_{A_0}(A_1) = \frac{1}{2}$, de manière similaire $q_1 = r_1 = \frac{1}{4}$.

2° Soit $n \in \mathbb{N}$. (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'évènement, donc d'après la formule des probabilités totales : $P(A_{n+1} = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})$, ie $p_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}r_n$, et de même $q_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{4}r_n$ et $r_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{2}r_n$. On trouve bien $V_{n+1} = MV_n$.

3° Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $V_n = M^n V_0$.
Initialisation : On a bien $V_0 = M^n V_0$ puisque $M^0 = I_3$;

Hérédité : On supposer que $V_n = M^n V_0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, comme $V_{n+1} = MV_n$ on a, par hypothèse de récurrence, que $V_{n+1} = MM^n V_0 = M^{n+1}V_0$ et l'hérédité est ainsi établie.

Ce qui montre bien que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = M^n V_0$, il ne reste plus qu'à utiliser que $V_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et la formule admise dans l'énoncé pour avoir $\begin{cases} p_n = \frac{4^n+2}{3.4^n} \\ p_n = \frac{4^n-1}{3.4^n} \\ r_n = \frac{4^n-1}{3.4^n} \end{cases}$.

4° Comme $\frac{4^n+2}{3.4^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4^n}{3.4^n} = \frac{1}{3}$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} q_n = \lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \dfrac{1}{3}$. Ainsi après un grand nombre d'étapes les trois positions sont équiprobables.

Partie II - Nombre moyen de passages en A

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on note a_n le nombre moyen de passages du pion en A entre l'étape 1 et l'étape n et on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } A_n \text{ est réalisé,} \\ 0 & \text{si } \overline{A_n} \text{ est réalisé.} \end{cases}$$

5° Interpréter la variable aléatoire $X_1 + \ldots + X_n$ et le nombre $E(X_1 + \ldots + X_n)$.

6° Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_n pour $n \in \mathbb{N}^\star$.

7° En déduire une expression de a_n.

Correction :

5° $X_1 + \ldots + X_n$ est le nombre de passage par A entre l'instant 1 et l'instant n, tandis que $E(X_1 + \ldots + X_n)$ est le nombre moyen de passage par A lors des n premières étapes.

6° On a $E(X_n) = 0.P(X_n = 0) + 1.P(X_n = 1) = P(A_n) = \frac{4^n+2}{3.4^n}$ (on peut aussi dire qu'elle suit la loi de Bernoulli).

7° Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $a_n = E(X_1 + \ldots + X_n)$, ainsi par linéarité de l'espérance : $a_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{4^i+2}{3.4^i} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^i\right] = \frac{n}{3} + \frac{1}{6}\frac{1-(1/4)^n}{1-1/4} = \frac{n}{3} + \frac{2}{9}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$.

Partie III - temps d'attente avant le premier passage en B

On définit la variable aléatoire T_B de la façon suivante :

1. si le pion ne passe jamais en B, on pose $T_B = 0$;
2. sinon, T_B est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B.

Nous allons déterminer la loi de T_B et son espérance.

8° Calculer $P(T_B = 1)$ et $P(T_B = 2)$.

9° Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\overline{B_n}$ en fonction de A_n et C_n.

10° Établir que $P(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) = \frac{1}{4}P(\overline{B_2} \cap \overline{B_1})$, puis en déduire que $P(B_3 | \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) = \frac{1}{4}$.

Dans la suite, on donne la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad P\left(B_{n+1} \middle| \bigcap_{k=1}^{n} \overline{B_k}\right) = \frac{1}{4}.$$

11° Pour $k \in \mathbb{N}^\star$, calculer $P(T_B = k)$. Que vaut $P(T_B = 0)$?

12° Justifier que la variable aléatoire T_B admet une espérance. Quelle est l'espérance de T_B ?

Correction :

8° On a $(T_B = 1) = B_1$, ainsi $P(T_B = 1) = \frac{1}{4}$. On a $(T_B = 2) = \overline{B_1} \cap B_2 = (A_1 \cap B_2) \cup (C_1 \cap B_2)$, ces deux évènements sont incompatibles ainsi $P(T_B = 2) = P(A_1 \cap B_2) + P(C_1 \cap B_2) = P(A_1)P_{A_1}(B_2) + P(C_1)P_{C_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{1}{4} = \frac{3}{16}$.

9° Si à l'instant n le pion n'est pas en B alors il est en A ou en C, ainsi $\overline{B_n} = A_n \cup C_n$.

10° On a $\overline{B_2}\cap\overline{B_1}=(A_1\cup C_1)\cap(A_2\cup C_2)=(A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap C_2)\cup(C_1\cap A_1)\cup(C_1\cap C_2)$. Ainsi, par incompatibilité des évènements, on a : $P(B_3\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_1})=P(B_3\cap A_1\cap A_2)+P(B_3\cap A_1\cap C_2)+P(B_3\cap C_1\cap A_1)+P(B_3\cap C_1\cap C_2)$. Or, par exemple, $P(B_3\cap A_1\cap A_2)=P(A_1\cap A_2)P_{A_1\cap A_2}(B_3)=P(A_1\cap A_2)P_{A_2}(B_3)=\frac{1}{4}P(A_1\cap A_2)$ (car la position à l'instant 3 ne dépend que de la position à l'instant 2). On procède de même avec les autres et on trouve $P(B_3\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_1})=\frac{1}{4}\left(P(A_1\cap A_2)+P(A_1\cap C_2)+P(C_1\cap A_1)+P(C_1\cap C_2)\right)=\frac{1}{4}P(\overline{B_2}\cap\overline{B_1})$ (par incompatibilité des évènement et d'après le début de la question).

Ainsi, par définition des probabilités conditionnelles, on a :$P_{\overline{B_2}\cap\overline{B_1}}(B_3)=\frac{P(B_3\cap\overline{B_2}\cap\overline{B_1})}{P(\overline{B_2}\cap\overline{B_1})}=\frac{1}{4}$.

11° Soit $k\in\mathbb{N}^\star$, comme $(T_B=k)=\left(\bigcap_{i=1}^{k-1}\overline{B_i}\right)\cap B_k$, ainsi (en utilisant le résultat admis) : $P(T_B=k)=P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1}\overline{B_i}\right)P_{\bigcap_{i=1}^{k-1}\overline{B_i}}(B_k)=\dfrac{1}{4}P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1}\overline{B_i}\right)$.

La même formule pour $k-1$ (si $k\geq 2$) donne $P(T_B=k-1)=\dfrac{1}{4}P\left(\bigcap_{i=1}^{k-2}\overline{B_i}\right)$. Or $P\left(\bigcap_{i=1}^{k-1}\overline{B_i}\right)=P\left(\bigcap_{i=1}^{k-2}\overline{B_i}\right)P_{\bigcap_{i=1}^{k-2}\overline{B_i}}(\overline{B_{k-1}})=P\left(\bigcap_{i=1}^{k-2}\overline{B_i}\right)\left(1-P_{\bigcap_{i=1}^{k-2}\overline{B_i}}(B_{k-1})\right)=\dfrac{3}{4}P\left(\bigcap_{i=1}^{k-2}\overline{B_i}\right)=3P(T_B=k-1)$. Ce qui montre $P(T_B=k)=\frac{3}{4}P(T_B=k-1)$. La suite $\left(P(T_B=k)\right)_k$ est donc une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$, comme de plus $P(T_B=1)=\frac{1}{4}$ on en déduit $P(T_B=k)=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^k$.

Comme T_B est à valeurs dans $\mathbb{N}$ on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}P(T_B=k)=1$, ainsi $P(T_B=0)=1-\sum_{k=1}^{+\infty}P(T_B=k)=1-\frac{3}{4}\frac{1}{1-3/4}=0$.

12° On a montré à la question précédente que T_B suivait une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{4}$, Ainsi $E(T_B)=4$.