DNS 3 : pour le lundi 4 novembre

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (i, j, k)$.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1° Quelle est l'image par f du vecteur $i + j - k$?

2° Démontrer que f est un projecteur puis déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $\ker(f)$.

3° Quelle est la matrice de f relativement à une base adaptée à $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f)$?

Correction : Attention E est un $\mathbb{K}$-ev, pas nécessairement $\mathbb{K}^3$ ...

1° On a $f(i) = 2i + j + k$, $f(j) = -i - k)$ et $f(k) = -i - j$, ainsi $f(i + j - k) = f(i) + f(j) - f(k) = 2i + 2j$.
On peut aussi utiliser que $A^t(11 - 1)$ sont les coordonnées de $f(i + j + k)$ dans la base $\mathcal{B}$ et donc $f(i + j - k) = 2i + 2j$.

2° Comme $A^2 = A$ on a $f \circ f = f$ donc f est un projecteur. Pour $\ker(f)$ on résout en notant X les coordonnées d'un vecteur u dans $\mathcal{B}$: $u \in \ker(f) \Leftrightarrow f(u) = 0 \Leftrightarrow AX = 0$.
Immédiatement (ou avec le pivot de Gauss) : $x = y$ et $x = z$ donc $\ker(f) = \mathrm{Vect}(i + j + k)$, pour l'image on sait que dans le cas d'un projecteur $\mathrm{Im}(f) = \ker(f - \mathrm{Id})$, on résout le système (pivot de Gauss) et on trouve $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(i + j, i + k)$ (*Alternative* qui marche même si ce n'es pas un projecteur : pour déterminer l'image on pourrait utiliser le fait que l'image est engendré par $f(i) = 2i + j + k$, $f(j) = -i - k$ et $f(k) = -i - j$, le théorème du rang nous dit que l'image est de dimension 2, il suffit de prendre deux vecteurs non colinéaires parmi ces trois pour avoir une famille génératrice).

3° Dans une base adaptée à $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f)$, la matrice de f est $\mathrm{diag}(1, 1, 0)$ par définition même ; et surtout sans calcul (en effet si $u \in \mathrm{Im}(f)$ alors $f(u) = u$ puisque f est un projecteur).

Exercice 2.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, on définit $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ par $\varphi(P) = P(X) + P(X + 1)$.

1° Montrer que φ est un automorphisme.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P_n(X) + P_n(X + 1) = 2X^n$.

2° Dans cette question uniquement $n = 2$.

a) Donner la matrice canoniquement associée à φ. Retrouver alors que $\varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}_2[X])$.

b) Démontrer que $\mathrm{Vect}(Q)$ est une droite vectorielle stable par φ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\varphi(Q) = \lambda Q$.
En déduire les droites stables par φ par résolution de systèmes linéaires.

3° Justifier qu'on peut exprimer $P_n(X + 1)$ comme combinaison linéaire de $P_0, \ldots, P_n$.

4° En calculant de deux façons $P_n(X+2)+P_n(X+1)$ déterminer une relation donnant P_n en fonction de $P_0, \ldots, P_{n-1}$.

Correction :

1° La linéarité est très facile. Comme $\deg(\varphi(P)) = \deg(P)$ on a $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
Le plus délicat ici est de justifier proprement $\ker(\varphi) = \{0\}$: Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(P) = 0$, on suppose $P \neq 0$, posons $p = \deg(P)$ et notons a_p son coefficient dominant, ainsi $a_p \neq 0$, comme $\varphi(P) = 0$ on a $P(X) = -P(X + 1)$, ce qui montre que $a_p = -a_p$, d'où $a_p = 0$, ce qui est absurde d'où $P = 0$.
Alternative : Soit $P \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, notons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on a $\varphi(P) = 0$ et $\varphi(P) = P(X) + P(X + 1) = 2a_0 + a_1(X + (X + 1)) + \ldots + a_n(X^n + (X + 1)^n)$, notons pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $Q_k = X^k + (X + 1)^k$ (on a

clairement $\deg(Q_k)=k$), ainsi $\varphi(P)=\sum_{k=0}^n a_kQ_k$, la famille $(Q_0,\dots,Q_n)$ est une famille de polynômes non nul de degré échelonné, c'est donc une famille libre, comme $\sum_{k=0}^n a_kQ_k=0$ on en déduit que $a_0=\dots=a_n=0$ et donc que $P=0$.

Ainsi φ est injectif, on a donc montré $\varphi\in GL(\mathbb{R}_n[X])$ (en effet pour un endomorphisme d'un ev de dimension fini on est bijectif dés qu'on est injectif).

Puisque $2X^n\in\mathbb{R}_n[X]$ et φ bijectif : il existe un unique antécédent P_n à ce polynôme par φ.

2° a) Posons $\mathcal{C}=(1,X,X^2)$. De $\varphi(1)=2$, $\varphi(X)=1+2X$ et $\varphi(X^2)=1+2X+2X^2$ vient $M=\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\varphi)=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}$ donc $\det(M)=2^3\neq 0$ et $\varphi\in\mathrm{GL}(\mathbb{R}_n[X])$.

b) $\mathrm{Vect}(Q)$ est stable par $\varphi\Leftrightarrow\varphi(Q)\in\mathrm{Vect}(Q)\Leftrightarrow\exists\lambda\in\mathbb{R}\,/\,\varphi(Q)=\lambda Q\Leftrightarrow Q\in\ker(\varphi-\lambda\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[X]})$.

En notant $\tilde{Q}$ les coordonnées de Q dans $\mathcal{C}$, on résout $(M-\lambda I_3)\tilde{Q}=0$, un système linéaire homogène de matrice $M-\lambda I_3$.

Qu'il existe une autre solution que 0 revient à la non inversibilité de $M-\lambda I_3$ ie à la nullité de son déterminant. Cette matrice étant triangulaire supérieure on a immédiatement $\det(M-\lambda I_3)=(2-\lambda)^3$ donc le seul scalaire λ possible est 2 et l'on cherche alors l'ensemble des solutions du système linéaire homogène de matrice $M-2I_3$; de tête (la matrice $M-2I_3$ est de rang 2 et sa première colonne est nulle) $\mathrm{Vect}(1)$.

Conclusion : φ ne laisse stable qu'une seule droite vectorielle, celle dirigée par 1.

3° Pour $k\in[\![0,n]\!]$, comme $\varphi(P_k)=2X^k$ et comme on a montré en 1° que φ préservait les degrés, on a que $\deg(P_k)=k$. Donc la famille $(P_0,\dots,P_n)$ est étagées en degré et est donc libre.

Comme $P_k\in\mathbb{R}_n[X]$ $(k\leq n)$ et $\mathrm{Card}(P_k)_{0\leq k\leq n}=\dim\mathbb{R}_n[X]$, $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, donc l'engendre.

Puisque $P_n(X+1)$ a même degré que P_n, ie. n, il s'exprime comme combinaison linéaire des vecteurs de la base $(P_0,\dots,P_n)$.

4° On suit l'indication, $P_n(X+2)+P_n(X+1)=2(X+1)^n$ par définition de P_n et d'après la question précédente, il existe $(\alpha_0,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P_n(X+1)=\displaystyle\sum_{k=0}^n\alpha_kP_k(X)$ d'où $P_n(X+2)+P_n(X+1)=\displaystyle\sum_{k=0}^n\alpha_k(P_k(X+1)+P_k(X))=\sum_{k=0}^n 2\alpha_kX^k$.

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^n 2\alpha_kX^k=2(X+1)^n$, ainsi (binôme de Newton) : $\displaystyle\sum_{k=0}^n\alpha_kX^k=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}X^k$, comme deux polynômes sont égaux ssi ils ont les mêmes coefficients (remarque : cela correspond en fait à la liberté de $(1,\dots,X^n)$) on a donc, pour tout k, que $\alpha_k=\binom{n}{k}$.

On en tire $P_n=2X^n-P_n(X+1)=2X^n-\displaystyle\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}P_k=2X^n-\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}P_k-P_n$.

Conclusion : $P_n=X^n-\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}P_k$.

Exercice 3 *(Noyaux itérés (d'après* E3A PSI, 2007*))*.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n\geq 2$ et soit $u\in\mathcal{L}(E)$.

1° (a) Montrer pour tout entier naturel i et j, $\ker(u^i)\subset\ker(u^{i+j}$.

(b) Pour tout $m\in\mathbb{N}$, on note $t_m=\dim(\ker(u^m))$. Prouver l'existence de : $r=\inf\{m\in\mathbb{N},\,t_m=t_{m+1}\}$.

(c) Montrer que :

(i) Pour tout entier naturel m, tel que $m<r$, $\ker(u^m)$ est strictement inclus dans $\ker(u^{m+1})$.

(ii) $\ker(u^r)=\ker(u^{r+1})$.

(iii) Pour tout entier $m\geq r$, $\ker(u^m)=\ker(u^{m+1})$.

2° Soit v un endomorphisme de E de rang $n-1$ tel que $u^n=0$.

(a) Soit p et q deux entiers naturels et w la restriction de v^q à $\mathrm{Im}(v^p)$.

(i) Déterminer $\mathrm{Im}(w)$.

(ii) Prouver que $\ker(w)\subset\ker(v^q)$.

(iii) Vérifier alors que l'on a : $\dim(\ker(v^{p+q}))\leq\dim(\ker(v^p))+\dim(\ker(v^q))$.

(iv) En déduire que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\dim(\ker(v^i))\leq i$.

(v) Démontrer qu'en fait $\dim(\ker(v^i))=i$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.

(b) Prouver que $v^{n-1} \neq 0$

(c) En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que $\mathcal{B} = \big(v^{n-1}(e), \ldots, v(e), e\big)$ soit une base de E.

(d) Écrire la matrice de v dans cette base.

Correction :

1° (a) Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$. Soit $x \in \ker(u^i))$, ainsi $u^i(x) = 0$, on a alors $u^{i+j}(x) = u^j(u^i(x)) = u^j(0) = 0$, ainsi $x \in \ker(u^{i+j})$, ce qui montre bien que $\ker(u^i) \subset \ker(u^{i+j}$.

(b) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, en appliquant la question précédente à $i = m$ et $j = 1$ on a $t_{m+1} \leq t_m$, ainsi la suite (t_m) est une suite croissante d'entiers compris entre 0 et n (car dimension de sev de E), ainsi elle converge, or une suite stationnaire d'entiers est stationnaire, ce qui montre que la partie $\{m \in \mathbb{N},\, t_m = t_{m+1}\}$ de $\mathbb{N}$ est non vide, ainsi elle possède un plus petit élément (en particulier une borne inférieure).

(c) Montrer que :

(i) Par minimalité de r, si $m < r$ alors $t_m \neq t_{m+1}$ et donc $t_m < t_{m+1}$ ce qui montre que l'inclusion $\ker(u^m) \subset \ker(u^{m+1})$ est stricte.

(ii) On a déjà montré $\ker(u^r) \subset \ker(u^{r+1})$, comme $\dim(\ker(u^r)) = t_r = t_{r+1} = \dim(\ker(u^{r+1}))$, on a donc $\ker(u^r) = \ker(u^{r+1})$.

(iii) Montrons par récurrence sur $m \geq r$ que $\ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$.
Initialisation : Déjà fait pour $m = r$.
Hérédité : On suppose qu'il existe $m \geq r$ tel que $\ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$, montrons que $\ker(u^{m+1}) = \ker(u^{m+2})$. On a déjà montré $\ker(u^{m+1}) \subset \ker(u^{m+2})$ en question 1°(a), montrons l'autre inclusion, soit $x \in \ker(u^{m+1}))$, ainsi $u^{m+2}(x) = 0$, ce qu'on peut écrire $u^{m+1}(u(x)) = 0$, ainsi $u(x) \in \ker(u^{m+1})$ donc $u(x) \in \ker(u^m)$ par hypothèse de récurrence, ie $u^m(u(x)) = 0$, ce qui correspond à $u^{m+1}(x) = 0$ et donc à $x \in \ker(u^{m+1})$, ce qui montre bien l'autre inclusion et donc que $\ker(u^{m+1}) = \ker(u^{m+2})$
On a bien montré, pour $m \geq r$, que $\ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$.

2° Soit v un endomorphisme de E de rang $n-1$ tel que $u^n = 0$.

(a) Soit p et q deux entiers naturels et w la restriction de v^q à $\mathrm{Im}(v^p)$.

(i) On a $\mathrm{Im}(w) = v^q(\mathrm{Im}(v^p)$, on a donc clairement que $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Im}(v^{p+q})$, or si $y \in \mathrm{Im}(v^{p+q})$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = v^{p+q}(x) = v^q(v^p(x))$, et comme $v^p(x) \in \mathrm{Im}(v^p)$, on a donc $y \in \mathrm{Im}(w)$. Ce qui montre que $\mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}(v^{p+q})$.

(ii) Soit $x \in \ker(w)$, on a ainsi $x \in \mathrm{Im}(v^p)$ et $w(x) = 0$, ainsi $v^q(x) = 0$ ce qui montre que $\ker(w) \subset \ker(v^q)$.
Remarque : On a même $\ker(w) = \mathrm{Im}(v^p) \cap \ker(v^q)$.

(iii) D'après le théorème du rang appliqué à w : $\dim(\mathrm{Im}(v^p)) = \dim(\ker(w)) + \dim(\mathrm{Im}(w))$, ainsi (d'après les deux questions précédentes) : $\mathrm{rg}(v^p) \leq \dim(\ker(v^q) + \mathrm{rg}(v^{p+q})$. En appliquant maintenant le théorème du rang à v^p et v^{p+q}, on a : $n - \dim(\ker(v^p)) \leq \dim(\ker(v^q) + n - \dim(\ker(v^{p+q}))$, ce qui montre bien que l'on a : $\dim(\ker(v^{p+q})) \leq \dim(\ker(v^p)) + \dim(\ker(v^q))$.

(iv) Tout d'abord, comme v est de rang $n-1$, le théorème du rang donne $\dim(\ker(v)) = 1$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, l'inégalité précédente pour $p = i$ et $q = 1$ donne $\dim(\ker(v^{p+1})) \leq \dim(\ker(v^p)) + \dim(\ker(v)) \leq \dim(\ker(v^p)) + 1$, ainsi par récurrence directe sur $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $\dim(\ker(v^i)) \leq i$.

(v) On a $\dim(\ker(v^n)) = n$ (en effet $v^n = 0$ et donc $\ker(v^n) = E$), comme $\dim(ker(v^n)) = n - 1 < 1$ on en déduit que le r de la question 1°(b) est plus grand que n (comme $\ker(v^n) = E = \ker(v^{n+1}$ on a même $r = n$), ainsi $(\dim(\ker(v^i)))_{1 \leq i \leq n}$ est strictement croissante d'après 1°(c)(i), ce qui impose, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, que $\dim(\ker(v^i)) = i$.

(b) Comme $\dim(\ker(v^{n-1})) = n - 1 \neq n$, on en déduit que $v^{n-1} \neq 0$.

(c) Soit $e \in E$ tel que $v^{n-1}(e) \neq 0$, notons $\mathcal{B} = \big(v^{n-1}(e), \ldots, v(e), e\big)$, soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_0 e + \lambda_1 v(e) + \ldots + \lambda_{n-1} v^{n-1}(e) = 0$. On compose l'égalité par v^{n-1} et on obtient sur $\lambda_0 v^{n-1}(e) + 0 = 0$ (car $v^n = 0$) ainsi $\lambda_0 = 0$ puisque $v^{n-1}(e) \neq 0$, si on compose l'égalité initiale par v^{n-2} on obtient $\lambda_1 = 0$, et ainsi de suite jusque obtenir $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$, ainsi $\mathcal{B}$ est une famille libre de n vecteurs dans E qui est de dimension n, ainsi $\mathcal{B}$ est une base de E.

(d) On trouve la matrice avec des 1 sur la sur-diagonale et des 0 partout ailleurs.