DNS $3^\star$: pour le lundi 4 novembre

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1 *(Noyaux itérés (d'après* E3A PSI, *2007)).*
Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1° (a) Montrer pour tout entier naturel i et j, $\ker(u^i) \subset \ker(u^{i+j}$.

(b) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note $t_m = \dim(\ker(u^m))$. Prouver l'existence de : $r = \inf\{m \in \mathbb{N},\, t_m = t_{m+1}\}$.

(c) Montrer que :

(i) Pour tout entier naturel m, tel que $m < r$, $\ker(u^m)$ est strictement inclus dans $\ker(u^{m+1})$.

(ii) $\ker(u^r) = \ker(u^{r+1})$.

(iii) Pour tout entier $m \geq r$, $\ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$.

2° Soit v un endomorphisme de E de rang $n-1$ tel que $u^n = 0$.

(a) Soit p et q deux entiers naturels et w la restriction de v^q à $\mathrm{Im}(v^p)$.

(i) Déterminer $\mathrm{Im}(w)$.

(ii) Prouver que $\ker(w) \subset \ker(v^q)$.

(iii) Vérifier alors que l'on a : $\dim(\ker(v^{p+q})) \leq \dim(\ker(v^p)) + \dim(\ker(v^q))$.

(iv) En déduire que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\dim(\ker(v^i)) \leq i$.

(v) Démontrer qu'en fait $\dim(\ker(v^i)) = i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

(b) Prouver que $v^{n-1} \neq 0$

(c) En déduire qu'il existe un vecteur e de E tel que $\mathcal{B} = \big(v^{n-1}(e), \dots, v(e), e\big)$ soit une base de E.

(d) Écrire la matrice de v dans cette base.

Correction :

1° (a) Soit $(i, j) \in \mathbb{N}^2$. Soit $x \in \ker(u^i))$, ainsi $u^i(x) = 0$, on a alors $u^{i+j}(x) = u^j(u^i(x)) = u^j(0) = 0$, ainsi $x \in \ker(u^{i+j})$, ce qui montre bien que $\ker(u^i) \subset \ker(u^{i+j}$.

(b) Pour tout $m \in \mathbb{N}$, en appliquant la question précédente à $i = m$ et $j = 1$ on a $t_{m+1} \leq t_m$, ainsi la suite (t_m) est une suite croissante d'entiers compris entre 0 et n (car dimension de sev de E), ainsi elle converge, or une suite stationnaire d'entiers est stationnaire, ce qui montre que la partie $\{m \in \mathbb{N},\, t_m = t_{m+1}\}$ de $\mathbb{N}$ est non vide, ainsi elle possède un plus petit élément (en particulier une borne inférieure).

(c) Montrer que :

(i) Par minimalité de r, si $m < r$ alors $t_m \neq t_{m+1}$ et donc $t_m < t_{m+1}$ ce qui montre que l'inclusion $\ker(u^m) \subset \ker(u^{m+1})$ est stricte.

(ii) On a déjà montré $\ker(u^r) \subset \ker(u^{r+1})$, comme $\dim(\ker(u^r)) = t_r = t_{r+1} = \dim(\ker(u^{r+1}))$, on a donc $\ker(u^r) = \ker(u^{r+1})$.

(iii) Montrons par récurrence sur $m \geq r$ que $\ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$.
Initialisation : Déjà fait pour $m = r$.
Hérédité : On suppose qu'il existe $m \geq r$ tel que $\ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$, montrons que $\ker(u^{m+1}) = \ker(u^{m+2})$. On a déjà montré $\ker(u^{m+1}) \subset \ker(u^{m+2})$ en question 1°(a), montrons l'autre inclusion, soit $x \in \ker(u^{m+1}))$, ainsi $u^{m+2}(x) = 0$, ce qu'on peut écrire $u^{m+1}(u(x)) = 0$, ainsi $u(x) \in \ker(u^{m+1})$ donc $u(x) \in \ker(u^m)$ par hypothèse de récurrence, ie $u^m(u(x)) = 0$, ce qui correspond à $u^{m+1}(x) = 0$ et donc à $x \in \ker(u^{m+1})$, ce qui montre bien l'autre inclusion et donc que $\ker(u^{m+1}) = \ker(u^{m+2})$
On a bien montré, pour $m \geq r$, que $\ker(u^m) = \ker(u^{m+1})$.

2° Soit v un endomorphisme de E de rang $n-1$ tel que $u^n = 0$.

(a) Soit p et q deux entiers naturels et w la restriction de v^q à $\mathrm{Im}(v^p)$.

(i) On a $\mathrm{Im}(w) = v^q(\mathrm{Im}(v^p)$, on a donc clairement que $\mathrm{Im}(w) \subset \mathrm{Im}(v^{p+q})$, or si $y \in \mathrm{Im}(v^{p+q})$ alors il existe $x \in E$ tel que $y = v^{p+q}(x) = v^q(v^p(x))$, et comme $v^p(x) \in \mathrm{Im}(v^p)$, on a donc $y \in \mathrm{Im}(w)$. Ce qui montre que $\mathrm{Im}(w) = \mathrm{Im}(v^{p+q})$.

(ii) Soit $x \in \ker(w)$, on a ainsi $x \in \mathrm{Im}(v^p)$ et $w(x) = 0$, ainsi $v^q(x) = 0$ ce qui montre que $\ker(w) \subset \ker(v^q)$. *Remarque* : On a même $\ker(w) = \mathrm{Im}(v^p) \cap \ker(v^q)$.

(iii) D'après le théorème du rang appliqué à w : $\dim(\mathrm{Im}(v^p)) = \dim(\ker(w)) + \dim(\mathrm{Im}(w))$, ainsi (d'après les deux questions précédentes) : $\mathrm{rg}(v^p) \leq \dim(\ker(v^q) + \mathrm{rg}(v^{p+q})$. En appliquant maintenant le théorème du rang à v^p et v^{p+q}, on a : $n - \dim(\ker(v^p)) \leq \dim(\ker(v^q) + n - \dim(\ker(v^{p+q}))$, ce qui montre bien que l'on a : $\dim(\ker(v^{p+q})) \leq \dim(\ker(v^p)) + \dim(\ker(v^q))$.

(iv) Tout d'abord, comme v est de rang $n-1$, le théorème du rang donne $\dim(\ker(v)) = 1$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, l'inégalité précédente pour $p = i$ et $q = 1$ donne $\dim(\ker(v^{p+1})) \leq \dim(\ker(v^p)) + \dim(\ker(v)) \leq \dim(\ker(v^p)) + 1$, ainsi par récurrence directe sur $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $\dim(\ker(v^i)) \leq i$.

(v) On a $\dim(\ker(v^n)) = n$ (en effet $v^n = 0$ et donc $\ker(v^n) = E$), comme $\dim(ker(v^n)) = n - 1 < 1$ on en déduit que le r de la question 1°(b) est plus grand que n (comme $\ker(v^n) = E = \ker(v^{n+1}$ on a même $r = n$), ainsi $(\dim(\ker(v^i)))_{1\leq i\leq n}$ est strictement croissante d'après 1°(c)(i), ce qui impose, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, que $\dim(\ker(v^i)) = i$.

(b) Comme $\dim(\ker(v^{n-1})) = n - 1 \neq n$, on en déduit que $v^{n-1} \neq 0$.

(c) Soit $e \in E$ tel que $v^{n-1}(e) \neq 0$, notons $\mathcal{B} = \left(v^{n-1}(e), \ldots, v(e), e\right)$, soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_0 e + \lambda_1 v(e) + \ldots + \lambda_{n-1} v^{n-1}(e) = 0$. On compose l'égalité par v^{n-1} et on obtient sur $\lambda_0 v^{n-1}(e) + 0 = 0$ (car $v^n = 0$) ainsi $\lambda_0 = 0$ puisque $v^{n-1}(e) \neq 0$, si on compose l'égalité initiale par v^{n-2} on obtient $\lambda_1 = 0$, et ainsi de suite jusque obtenir $\lambda_0 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$, ainsi $\mathcal{B}$ est une famille libre de n vecteurs dans E qui est de dimension n, ainsi $\mathcal{B}$ est une base de E.

(d) On trouve la matrice avec des 1 sur la sur-diagonale et des 0 partout ailleurs.

Exercice 2 *(*CENTRALE PC*, Maths 2 partie I,* 2016*)* **Opérateur de translation et opérateur de différence.**

Dans tout le problème, $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.

Pour $a < b$ dans $\mathbb{Z}$, on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble $[a, b] \cap \mathbb{Z}$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k le polynôme X^{k-1}. On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ dont la famille $(P_k)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$ est une base. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P et, lorsque P est non nul, $cd(P)$ désigne le coefficient dominant de P, c'est-à-dire le coefficient du monôme $X^{\deg(P)}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![0, k]\!]$, le coefficient binomial $\dbinom{k}{j}$ vaut $\dfrac{k!}{j!(k-j)!}$.

Pour un ensemble E et $f : E \to E$, on définit l'application $f^k : E \to E$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ de la façon suivante :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \text{ et } f^{k+1} = f \circ f^k$$

Si f est bijective, on note f^{-1} la réciproque de f et pour $k \in \mathbb{N}$, on note $f^{-k} = (f^{-1})^k$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille p.

A - L'opérateur de translation

L'opérateur de translation est l'endomorphisme τ de $\mathbb{R}_n[X]$ donné par :

$$\begin{array}{rccc} \tau : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P(X) & \mapsto & P(X+1) \end{array}$$

A.1) Pour un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\tau(P))$ et $cd(\tau(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $cd(P)$.

A.2) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $\tau^k(P)$ en fonction de P.

A.3) Donner la matrice $M = (M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ de τ dans la base $(P_k)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$. On exprimera les coefficients $M_{i,j}$ en fonction de i et j.

A.4) (*pour les* 5/2) Préciser l'ensemble des valeurs propres de τ. L'application τ est-elle diagonalisable ?

A.5) L'application τ est-elle bijective ? Si oui, préciser τ^{-1}. L'expression de τ^j trouvée à la question A2 pour $j \in \mathbb{N}$ est-elle valable pour $j \in \mathbb{Z}$?

A.6) Que vaut M^{-1} ? Exprimer les coefficients $(M^{-1})_{i,j}$ en fonction de i et j.

A.7) On se donne une suite réelle $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et on définit, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$

$$v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j \tag{1}$$

Déterminer une matrice $Q \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

A.8) En déduire la formule d'inversion : pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j \tag{2}$$

A.9) On considère un réel λ et la suite $(u_k = \lambda^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Quelle est la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la formule (1) ? Vérifier alors la formule (2).

B - L'opérateur de différence

L'opérateur de différence est l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\delta = \tau - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$:

$$\begin{array}{rccc} \delta : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & P(X) & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array}$$

B.1) Pour un polynôme non constant $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\delta(P))$ et $cd(\delta(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $cd(P)$.

B.2) En déduire le noyau $\ker(\delta)$ et $\mathrm{Im}(\delta)$ de l'endomorphisme δ.

B.3) Plus généralement, pour $j \in [\![1, n]\!]$, montrer les égalités suivantes :

$$\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X] \tag{3}$$

B.4) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\delta^k(P)$ en fonction des $\tau^j(P)$ pour $j \in [\![0, k]\!]$.

B.5) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que :

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0 \tag{4}$$

B.6) Dans cette question, on veut montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ telle que $u \circ u = \delta$. On suppose, par l'absurde, qu'une telle application u existe.

a) Montrer que u et δ^2 commutent.

b) En déduire que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par l'application u.

c) Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Conclure.

B.7) Dans cette question, on cherche tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par l'application δ.

a) Pour P polynôme non nul de degré $d \leqslant n$, montrer que la famille $(P, \delta(P), \ldots, \delta^d(P))$ est libre. Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille ?

b) En déduire que si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et non réduit à $\{0\}$, il existe un entier $d \in [\![0, n]\!]$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$.

Correction :

I.A.1) Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$, de degré $d = \deg(P)$ (i.e. $a_d \neq 0$). Alors, $\tau(P) = P(X+1) = \sum_{k=0}^{d} a_k (X+1)^k = a_d (X+1)^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k (X+1)^k = a_d X^d + \sum_{k=0}^{d-1} \binom{n}{k} a_d X^k + \sum_{k=0}^{d-1} a_k (X+1)^k$.
Comme $a_d \neq 0$ on a donc $\deg(\tau(P)) = \deg(P)$ et $\mathrm{cd}(\tau(P)) = \mathrm{cd}(P)$.

I.A.2) Notons que $\tau^0(P) = P$. De plus, si $\tau^k(P)(X) = P(X+k)$, alors $\tau^{k+1}(P)(X) = \tau(\tau^k(P))(X) = P((X+k)+1) = P(X+(k+1))$.
Ainsi, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\tau^k(P)(X) = P(X+k)$.

I.A.3) D'après la formule du binôme de Newton (changement de variable $i = h+1$), pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$, on a $\tau(P_j)(X) = (X+1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} X^h = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} P_i$.
M est donc triangulaire supérieure et les coefficients de M vérifient donc $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, $(M)_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{pour} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

I.A.4) La matrice M est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres se trouvent sur la diagonale. Il s'agit des nombres $\binom{j-1}{j-1} = 1$. Comme M et τ ont les mêmes valeurs propres, $\mathrm{Sp}(\tau) = \{1\}$. Si M était diagonalisable, elle serait alors semblable à la matrice unité, et donc elle serait égale à la matrice unité.
Ainsi, M et τ ne sont pas diagonalisable.

I.A.5) Comme 0 n'est pas valeur propre de τ, τ est bijective (alternative $\det(\tau) = 1$ puisque le déterminant d'une matrice qui le représente est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale).
Puis si on considère $\overline{\tau} : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], P(X) \mapsto P(X-1)$,
on montre qu'il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Il vérifie : $\tau \circ \overline{\tau} = \overline{\tau} \circ \tau = \mathrm{id}$: en effet pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $\tau(\overline{\tau}(P))(X) = \overline{\tau}(P)(X+1) = P(X) = \tau(\overline{\tau}(P))(X)$. Ainsi $\tau^{-1}(P)(X) = P(X-1)$.
Puis, comme à la question 2), on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\tau^{-k}(P)(X) = P(X-k)$.
Ainsi la formule est toujours vraie : $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\tau(P)(X) = P(X+k)$.

I.A.6) Avec l'expression de τ^{-1}, on applique la même méthode qu'en 3) et on obtient :

$$\forall j \in \mathbb{N}_{n+1},\ \tau^{-1}(P_j)(X) = (X-1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} (-1)^{j-1-h} X^h = \sum_{i=1}^{j} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} P_i$$

Puis $\forall i, j \in [1, n]$, $(M^{-1})_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1} & \text{pour} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

I.A.7) La $k+1^{\text{e}}$ ligne du calcul $V = Q \times U$ est justement $v_k = \sum_{j=1}^{n+1} Q_{k+1,j} u_{j-1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j$.

On peut identifier (après changement d'indice) : $Q_{k,j} = \begin{cases} \binom{k-1}{j-1} & \text{pour} \quad j \leqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On a donc $Q = {}^tM$.

I.A.8) M est inversible, donc $Q = {}^tM$ également et $Q^{-1} = ({}^tM)^{-1} = {}^t(M^{-1})$.
Puis par équivalence : $V = Q \times U \iff U = Q^{-1} \times V = {}^t(M^{-1}) \times V$.
La $k+1^{\text{e}}$ ligne de ce calcul donne alors : $u_k = \sum_{j=1}^{n+1} \left({}^t(M^{-1})\right)_{k+1,j} v_{j-1} = \sum_{j=1}^{n+1} \left((M^{-1})\right)_{j,k+1} v_{j-1} = \sum_{j=0}^{n} \left((M^{-1})\right)_{j+1,k+1} v_j$.
Ainsi $u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j$.

I.A.9) On a alors : $v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^j = (\lambda+1)^k$. On vérifie bien : $\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\lambda+1)^j (-1)^{k-j} = ((\lambda+1)-1)^k = u_k$.

I.B - L'opérateur de différence

I.B.1) De manière similaire à $1.A.1$), avec P non constant on a :

$$\delta(P)(X) = a_d X^d + (d a_d + a_{d-1}) X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k X^k - a_d X^d - a_{d-1} X^{d-1} - \sum_{k=0}^{d-2} a_k X^k = d a_d X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} c_k X^k$$

Comme $a_d \neq 0$: si P, non constant, $\deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1$ et $\mathrm{cd}(\delta(P)) = \deg(P) \times \mathrm{cd}(P)$

I.B.2) D'après la question précédente, si P n'est pas constant, $\deg(P) \geqslant 1$ et $\deg(\delta(P)) \geqslant 0$, donc $\delta(P)$ n'est pas nul. Ainsi, si $\delta(P) = 0$, alors P est constant.
Réciproquement, si P est constant, le calcul (simple) donne $\delta(P) = 0$.
Donc $\ker(\delta) = \mathbb{R}_0[X]$.
La question précédente montre aussi que $\mathrm{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
Or d'après le théorème du rang : $\dim(\mathrm{Im}(\delta)) = n + 1 - \dim(\ker(\delta)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$.
Donc : $\mathrm{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

I.B.3) Si $\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$, avec $j < n$.

$$P \in \ker(\delta^{j+1}) \iff \delta^{j+1}(P) = 0 = \delta^j(\delta(P)) \iff \delta(P) \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$$

Donc

$$P \in \ker(\delta^{j+1}) \iff \deg(P) = \deg(\delta(P)) + 1 \leqslant (j-1) + 1 = j \iff P \in \mathbb{R}_j[X]$$

Ainsi, par récurrence :

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$$

Si $P \in \mathrm{Im}(\delta^j)$, alors il existe $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P = \delta^j(Q)$.
Or une récurrence simple (suite arithmétique) montre que $\deg P = \deg(Q) - j$, donc $\deg(P) \leqslant n - j$.
Par conséquent, $P \in \mathbb{R}_{n-j}[X]$, et donc $\mathrm{Im}(\delta^j) \subset \mathbb{R}_{n-j}[X]$.
Le théorème du rang assure par ailleurs que ces deux espaces ont même dimension, donc : $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]$.

I.B.4) Notons Δ, la matrice de δ dans la base (P_k).
Par construction de $\delta = \tau - \mathrm{id}$, on a $\Delta = M - I_{n+1}$.
Puis comme M commute avec I_{n+1}, alors d'après la formule de Newton : $\Delta^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}(-1)^{k-j}M^j$.

Ce qui permet d'affirmer, en revenant aux endomorphismes : $\forall k \in \mathbf{N}$, $\delta^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\tau^j$.

I.B.5) Si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \ker(\delta^n)$, alors $\delta^n(P) = 0$. Donc :

$$0 = \delta^n(P) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}\tau^j(P) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}[\tau^j(P)(X)] = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}P(X+j)$$

Et en particulier en la valeur réelle $X = 0$: $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}P(j) = 0$.

I.B.6) a) $u \circ \delta^2 = u \circ [u^2 \circ u^2] = u^5 = [u^2 \circ u^2] \circ u = \delta^2 \circ u$. Donc u et δ^2 commutent.

b) Soit $P \in \mathbb{R}_1[X] = \ker \delta^2$, alors $\delta^2(u(P)) = u(\delta^2(P)) = u(0) = 0$.
Donc $u(P) \in \ker(\delta^2) = \mathbb{R}_1[X]$. Par conséquent $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u.

c) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors : $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = A \times A^2 = A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Donc $a = d$ et $c = 0$, ainsi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, puis $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$, et ainsi nécessairement $a = 0$, puis $2ab = 0$; ce qui est contradictoire avec $ab = 1$.
Donc aucune matrice A ne vérifie $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d) Puisque $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u, notons $\tilde{u} : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}_1[X], P \mapsto u(P)$.
Considérons alors A, la matrice de $\tilde{u}$ dans la base (P_1, P_2) de $\mathbb{R}_1[X]$.
Alors A^2 est égale à la matrice de δ sur $\mathbf{R}_1[X]$ donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Or d'après la question précédente, ceci est impossible. Donc Il n'existe pas d'endomorphisme u de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $u^2 = \delta$.

I.B.7) a) On a vu (questions $I.B.3$)) que $\deg(\delta^i(P)) = \deg(P) - i = d - i$.
Ainsi, la famille $(P, \delta(P), \ldots \delta^d(P))$ est une famille de degré échelonné (de d à 0).
C'est une famille libre et $\mathrm{vect}(P, \delta(P), \ldots \delta^d(P)) = \mathbb{R}_d[X]$.

b) Soit V stable par δ.
Si $P \in V$, alors $\delta^i(P) \in V$ et donc $\mathbb{R}_{\deg(P)}[X] = \mathrm{vect}(P, \delta(P), \ldots \delta^n(P)) \subset V$.
Il reste à montrer l'égalité, il faut prendre le polynôme en degré maximum...
V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. Notons $d = \dim(V) - 1$.
Notons $(e_0, \ldots e_d)$ une base de V. Nécessairement, l'un des e_i est un polynôme de degré supérieur ou égal à d.
Sinon, on aurait une famille libre de $d+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_d[X]$, ce qui est impossible.
Donc il existe P dans V de degré $r \geqslant d$.
Si $\deg P = r > d$, alors d'après la remarque précédente, $\mathbb{R}_r[X] = \mathrm{vect}(P, \delta(P), \ldots \delta^r(P)) \subset V$ et V ne peut être de dimension $d+1$. Donc il existe P de degré d dans V et $\mathbb{R}_d[X] \subset V$ et par égalité des dimensions : il existe $d \in [\![0, n]\!]$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$