DNS 4 : pour le vendredi 22 novembre

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Remarque : Dans l'exercice 1 (et uniquement à la question 5° b) on a besoin de ce théorème qui sera traité plus tard (pour information la démonstration du TCD est hors programme).

Théorème de convergence dominé à paramètre continu :
Si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et a une borne de A et f une fonction définie sur $A \times I$ telle que :
— pour tout $t \in I$, $f(x,t) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell(t)$;
— pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I ;
— hypothèse de domination : il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $|f(x,t)| \leq \varphi(t)$;

alors ℓ est intégrable sur I et : $\displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t \underset{x\to a}{\longrightarrow} \int_I \ell(t)\mathrm{d}t$.

Exercice 1 *Autour de l'intégrale de Dirichlet (*EPITA MP PC PSI 2017*).*
Dans tout ce problème on désigne par α un nombre réel *positif*, et on se propose d'étudier la fonction f définie par l'intégrale suivante lorsque celle-ci est convergente :

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t.$$

On se propose d'approfondir dans la partie I l'absolue convergence, puis la convergence de l'intégrale $f(\alpha)$, ce qui permet d'obtenir le domaine de définition de f. Puis on étudie dans les parties II et III le comportement de f au voisinage de 0 et 2. Enfin, dans la partie IV (qui est indépendante des précédentes), on calcule $f(1)$.

Partie I : Absolue convergence et convergence de l'intégrale $f(\alpha)$.

Dans cette partie, on étudie la convergence de $f(\alpha)$ à l'aide des deux intégrales suivantes :

$$I(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t \quad ; \quad J(\alpha) = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t.$$

1° *Étude de la convergence de l'intégrale $I(\alpha)$*

a) Donner un équivalent de la fonction $t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}$ quand t tend vers 0.
b) En déduire pour quelles valeurs du réel α l'intégrale $I(\alpha)$ est convergente.

2° *Étude de l'absolue convergence de l'intégrale $J(\alpha)$*

a) Démontrer que l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente pour $\alpha > 1$.
b) Vérifier que la fonction $t \longmapsto |\sin(t)|$ est π-périodique, et en déduire, pour tout entier k, la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(t)|\mathrm{d}t$.
c) Démontrer l'encadrement suivant pour tout réel $\alpha \geqslant 0$ et tout entier $k \geqslant 1$:

$$\frac{2}{(k+1)^\alpha \pi^\alpha} \leqslant \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{k^\alpha \pi^\alpha}.$$

En déduire pour tout réel $\alpha \geqslant 0$ et tout entier $n \geqslant 2$ que :

$$\frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{\pi}^{n\pi} \frac{|\sin(t)|}{t^\alpha}\mathrm{d}t \leqslant \frac{2}{\pi^\alpha}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^\alpha}.$$

d) Préciser pour quelles valeurs du réel α l'intégrale $J(\alpha)$ est absolument convergente.

3° *Étude de la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$*

a) Étudier la convergence de l'intégrale $J(0)$.

b) Démontrer la relation suivante pour tout réel $\alpha > 0$ et tout réel $x \geqslant \pi$:

$$\int_\pi^x \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t = -\frac{1}{\pi^\alpha} - \frac{\cos(x)}{x^\alpha} - \alpha\int_\pi^x \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t.$$

c) Calculer (en justifiant son existence) l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t$ pour $\alpha > 0$.

En déduire l'absolue convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t$ pour $\alpha > 0$.

d) En déduire la convergence de l'intégrale $J(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.

4° *Domaine de définition de la fonction f*

Préciser les domaines de convergence et d'absolue convergence de l'intégrale $f(\alpha)$.
En déduire le domaine de définition de la fonction f introduite dans le préambule.
Dans toute la suite, on suppose que le paramètre α appartient à ce domaine de définition.

Partie II : Étude de $f(\alpha)$ quand α tend vers 0.

On se propose dans cette partie d'étudier $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 et on écrit à cet effet :

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t + \int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t.$$

5° *Limite de l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$

a) Justifier l'inégalité $0 \leqslant \sin(t) \leqslant t$ pour $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

b) En déduire à l'aide du théorème de convergence dominée (dont on précisera l'énoncé et dont on vérifiera les hypothèses) la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{\alpha\to 0} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t.$$

6° *Limite de l'intégrale* $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$

a) À l'aide d'une double intégration par parties, justifier l'égalité suivante :

$$\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{\alpha}{(\pi/2)^{\alpha+1}} - \alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}}\mathrm{d}t.$$

b) Calculer l'expression $\displaystyle\alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+2}}\mathrm{d}t$, puis déterminer sa limite quand α tend vers 0.

En déduire la limite de $\displaystyle\alpha(\alpha+1)\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^{\alpha+2}}\mathrm{d}t$, puis de $\displaystyle\int_{\pi/2}^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}\mathrm{d}t$, quand α tend vers 0.

c) Déduire de cette question et de la précédente la limite de $f(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.
Peut-on obtenir cette limite par application directe du théorème de convergence dominée à l'intégrale $f(\alpha)$?

Partie III : Étude de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2.

7° *Une autre expression de la fonction f*

a) Démontrer la convergence de l'intégrale suivante pour $0 < \alpha < 2$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t.$$

b) À l'aide d'une intégration par parties justifiée, établir que :

$$f(\alpha) = \alpha\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}}\mathrm{d}t.$$

En déduire que la fonction f est à valeurs strictement positives sur $]0, 2[$.

8° *Limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2.*

On considère la fonction auxiliaire φ définie pour $t \in \mathbb{R}^*$ par $\varphi(t) = \dfrac{1-\cos(t)}{t^2}$.

a) Quelle est la limite L de $\varphi(t)$ lorsque t tend vers 0 ?
On posera désormais $\varphi(0) = L$, de sorte que φ est ainsi définie et continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction φ reste strictement positive sur $[0, \pi]$ et justifier qu'elle admet sur $[0, \pi]$ un minimum strictement positif noté μ (qu'on ne demande pas d'expliciter).

c) Établir les inégalités suivantes :

$$f(\alpha) \geqslant \alpha \int_0^\pi \frac{1-\cos(t)}{t^{\alpha+1}} \mathrm{d}t \geqslant \alpha\mu \frac{\pi^{2-\alpha}}{2-\alpha}.$$

d) En déduire la limite de $f(\alpha)$ quand α tend vers 2 par valeurs inférieures.

Partie IV : Calcul de l'intégrale $f(1)$

9° *Calcul d'intégrales auxiliaires*

a) Justifier pour tout entier naturel n l'existence de l'intégrale suivante :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \mathrm{d}t.$$

b) Préciser la valeur de I_0 et prouver que l'on a $I_n - I_{n-1} = 0$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
En déduire la valeur de l'intégrale I_n.

c) On considère la fonction auxiliaire ψ définie pour $0 < t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ par $\psi(t) = \dfrac{1}{\sin(t)} - \dfrac{1}{t}$.
Quelle est la limite L de $\psi(t)$ lorsque t tend vers 0 ?
On posera désormais $\psi(0) = L$, de sorte que ψ est ainsi définie et continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

d) Démontrer l'égalité suivante pour tout entier naturel n :

$$\int_0^{\pi/2} \psi(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(u)}{u} \mathrm{d}u.$$

10° *Lemme de Riemann-Lebesgue pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$*

On considère une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ du segment $[0, \frac{\pi}{2}]$ dans $\mathbb{R}$.

À tout entier naturel n, on associe l'intégrale suivante :

$$u_n = \int_0^{\pi/2} g(t)\sin((2n+1)t)\mathrm{d}t.$$

a) Démontrer que :

$$u_n = \frac{g(0)}{2n+1} + \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} g'(t)\cos((2n+1)t)\mathrm{d}t.$$

b) A l'aide d'une majoration convenable de cette dernière intégrale, en déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

c) En admettant, ce que l'on ne demande pas de vérifier ici, que la fonction continue ψ introduite à la question 9.*c*) est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, en déduire la valeur de $f(1)$.