DS 4 : samedi 23 novembre

4h sans calculatrice

Le candidat numérotera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 *(proche du cours et/ou des TDs)*.

1° On considère l'application f définie sur $E = \mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = (3x + 4z, -2x - y - 2z, -2x - 3z)$.

(a) Donner la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer le noyau de f, puis en déduire son image.

(c) Déterminer les réels λ tels que $\det(M - \lambda I_3) = 0$. On note λ_1 et λ_2 les deux réels trouvés.

(d) Déterminer, pour $i \in \{1, 2\}$, les sev $E_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(f - \lambda_i \mathrm{Id})$ (on en donnera des bases).

(e) Montrer que $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$

(f) Donner la matrice D de f dans une base adaptée à $E = E_{\lambda_1} \oplus E_{\lambda_2}$.

(g) Reconnaitre l'application linéaire f.

(h) Pour $n \in \mathbb{N}$, donner explicitement M^n.

2° Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on considère la matrice $C_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $C_n = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & & \vdots \\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 3 & 0 \\ \vdots & & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ et on pose $c_n = \det(C_n)$.

(a) Calculer c_1 et c_2.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, déterminer une relation de récurrence entre c_{n+2}, c_{n+1} et c_n.

(c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, l'expression de c_n en fonction de n.

3° Étudier la convergence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t) \sin t \, \mathrm{d}t$.

4° Justifier de l'éventuelle existence des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin t \exp(-t^2) \, \mathrm{d}t$;

(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t$;

(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(t+1)}$.

Exercice 2 *(E3A PC, exercice 4, 2020)*.

1. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq I_n$ et $M \neq \frac{1}{2} I_n$, vérifiant la relation :

$$2M^2 = 3M - I_n.$$

1.1 On note $F = \mathrm{Vect}(I_n, M, M^2)$. Prouver que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k \in F$.
Déterminer la dimension de F et en donner une base.

1.2 Vérifier que F est stable pour la multiplication des matrices.

1.3 Soient $A = M - I_n$ et $B = M - \frac{1}{2} I_n$.
Justifier que $\mathcal{B} = (A, B)$ constitue une base de F.
Déterminer les composantes des matrices AB, BA, A^2 et B^2 dans la base $\mathcal{B}$.

1.4 Déterminer toutes les matrices T de F vérifiant $T^2 = M$.

2. Soit X une variable aléatoire réelle telle que l'on a :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad 2\mathbb{P}(X = n + 2) = 3\mathbb{P}(X = n + 1) - \mathbb{P}(X = n).$$

2.1 On note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$. Exprimer p_n en fonction de n.
En déduire la loi de la variable aléatoire X.

2.2 Justifier que la variable aléatoire X possède une espérance et une variance et les calculer.
On pourra admettre que si $q \in]-1,1[$, alors $\sum nq^{n-1}$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$, et que $\sum n(n-1)q^{n-2}$ converge aussi et que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

Exercice 3 *(*E3A MP*, Maths B, 2014)*.
On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit n un entier naturel non nul et soit $E = \mathbb{K}^n$. Pour tout endomorphisme u de E, on note $\mathrm{Ker}(u)$ le noyau de u et $\mathrm{Im}(u)$ l'image de u.

1° Question de cours : Soient u et v deux endomorphismes qui commutent. Démontrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

Dans la suite de l'exercice, u désigne un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$.

2° Démontrer que $\mathrm{Im}(u)$ est contenu dans $\mathrm{Ker}(u)$.

3° Quelle inégalité obtient-on ainsi sur le rang de u ? On citera précisément le théorème utilisé.

4° On suppose ici que $n = 2$, soit $E = \mathbb{K}^2$. On suppose ici u non nul.
(a) Démontrer qu'il existe une droite D dans E telle que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u) = D$.
(b) Soit v un endomorphisme de E tel que $v^2 = 0$ et $u \circ v = v \circ u$.
i. Démontrer que $v(D) \subset D$.
ii. Démontrer que $u \circ v = 0$.
(c) Soient v et w deux endomorphismes de E tels que $v^2 = 0$, $w^2 = 0$, $u \circ v = v \circ u$ et $u \circ w = w \circ u$.
Démontrer que $v \circ w = 0$.

5° On revient au cas général. Soit m un entier naturel ≥ 2. Soient $u_1, \ldots, u_m$ des endomorphismes de E tels que :

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, m\}^2,\ u_i^2 = 0 \text{ et } u_i \circ u_j = u_j \circ u_i.$$

On pose $F_1 = \mathrm{Im}(u_1)$ et pour un entier i compris entre 2 et m, $F_i = \mathrm{Im}(u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_{i-1} \circ u_i)$.
(a) Démontrer que, pour tout entier i compris entre 1 et $m-1$, F_i est un sous-espace vectoriel stable par u_{i+1}.
(b) En déduire que, pour tout entier i compris entre 1 et m, F_i est de dimension au plus $\frac{n}{2^i}$.
(c) Dans le cas où $n < 2^m$, démontrer que l'endomorphisme $u_1 \circ u_n \circ \cdots \circ u_m = 0$.

6° (**Bonus** : Ne traiter que s'il vous reste du temps)
On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dans ce paragraphe. Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ usuel :

$$\langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Pour toute matrice A, on note $\mathrm{Ker}(A)$ le noyau de A, et $\mathrm{Im}(A)$ l'image de A.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $A^\top$ la matrice transposée de A.

(a) (rajout) On note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire. Montrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top X = \|X\|^2$
(b) Démontrer que $E = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A^\top)$.
(c) On suppose de plus $A^2 = 0$. Démontrer que $\mathrm{Im}(A + A^\top) = \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(A^\top)$.

Exercice 4 *(Préambule et partie I de :* BANQUE PT*, Maths C, 2019)*.

Préambule

1° Soit h la fonction qui, à tout réel x strictement positif associe : $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$.
Montrer que h est constante sur $]0, +\infty[$. (On précisera la valeur prise par h sur $]0, +\infty[$.)

2° (a) Pour tout réel t de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, exprimer $\cos t$ en fonction de $\cos \dfrac{t}{2}$
(b) Pour tout réel t de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, comparer $\dfrac{1}{1 + \tan^2 \frac{t}{2}}$ et $\cos^2 \dfrac{t}{2}$.

(c) Pour tout réel t de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on pose $u = \tan \frac{t}{2}$.
On demande d'exprimer $\cos t$ en fonction de u.

Partie I

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin^n(x) \mathrm{d}x.$$

3° (a) Montrer que pour tout entier naturel n, l'intégrale I_n est convergente.

(b) Que vaut I_0 ?

(c) Donner une primitive de la fonction, qui a tout réel positif x, associe : $\mathrm{e}^{-x}\cos(x)$ (on pourra utiliser la fonction à valeurs complexes $x \mapsto \mathrm{e}^{-x} e^{\mathrm{i}x}$).

(d) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, montrer, à l'aide d'une double intégration par parties, la relation :

$$I_n = \frac{n(n-1)}{n^2+1} I_{n-2}.$$

(e) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de I_{2n} en fonction de n et du produit $\prod_{k=0}^{n}(4k^2+1)$.

4° (a) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \ln \frac{2n(2n-1)}{4n^2+1}$. Étudier la nature de la série de terme général u_n.

(b) Pour tout entier naturel non nul n, comparer $\ln I_{2n}$ et $\sum_{k=1}^{n} u_k$.

(c) Quelle est la limite de la suite de terme général I_{2n} ?

Exercice 5 *(Intégrale de Dirichlet, partie 4* CCP *PSI 2014)***.**

1° (a) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est convergente.

(b) Montrer que pour tout $x \geq 1$, on a

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$$

En déduire que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est convergente.

(c) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}\,dt$ est convergente.

(d) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}\,dt$ est divergente. En déduire la divergence de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\,dt$.

2° On désigne par g la fonction définie sur $]0,1]$ par $g(t) = \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)$ et par f la fonction définie sur le même intervalle par $f(x) = \int_x^1 g(t)\,dt$.

(a) Montrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0. On notera encore f ce prolongement.

(b) Montrer que f est continue sur $[0,1]$ et indéfiniment dérivable sur $]0,1]$.

(c) Montrer que

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 |g(t)|\,dt = +\infty$$

3° Pour $x \in]0,1]$, justifier que f est dérivable sur $[x,1]$ et donner f'.
On note $\lambda(x) = \int_1^x \sqrt{1+(f'(t))^2}\mathrm{d}t$. Montrer que $\lim_{x\to 0^+} \lambda(x) = +\infty$.

Remarque : Le dernier résultat est "inattendu", f est continue sur $[0,1]$ et $\lambda(x)$ est la longueur de la courbe représentative de la fonction f sur le segment $[x,1]$.