DS 4 : samedi 23 novembre

4h sans calculatrice

Le candidat numérotera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1 *(proche du cours et/ou des TDs)*.

1° On considère l'application f définie sur $E=\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z)=(3x+4z,-2x-y-2z,-2x-3z)$.

(a) Donner la matrice M de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
(b) Déterminer le noyau de f, puis en déduire son image.
(c) Déterminer les réels λ tels que $\det(M-\lambda I_3)=0$. On note λ_1 et λ_2 les deux réels trouvés.
(d) Déterminer, pour $i\in\{1,2\}$, les sev $E_{\lambda_i}=\mathrm{Ker}(f-\lambda_i\mathrm{Id})$ (on en donnera des bases).
(e) Montrer que $E=E_{\lambda_1}\oplus E_{\lambda_2}$
(f) Donner la matrice D de f dans une base adaptée à $E=E_{\lambda_1}\oplus E_{\lambda_2}$.
(g) Reconnaitre l'application linéaire f.
(h) Pour $n\in\mathbb{N}$, donner explicitement M^n.

2° Pour $n\in\mathbb{N}^\star$ on considère la matrice $C_n\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $C_n=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & \dots & 0\\ 2 & 5 & 3 & 0 & & \vdots\\ 0 & 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 3 & 0\\ \vdots & & 0 & 2 & 5 & 3\\ 0 & \dots & \dots & 0 & 2 & 5\end{pmatrix}$ et on pose $c_n=\det(C_n)$.

(a) Calculer c_1 et c_2.
(b) Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, déterminer une relation de récurrence entre c_{n+2}, c_{n+1} et c_n.
(c) En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, l'expression de c_n en fonction de n.

3° Étudier la convergence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\exp(-t)\sin t\,\mathrm{d}t$.

4° Justifier de l'éventuelle existence des intégrales suivantes :

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\sin t\exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$;
(b) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$;
(c) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(t+1)}$.

Correction :

1° (a) $M=\begin{pmatrix}3 & 0 & 4\\ -2 & -1 & -2\\ -2 & 0 & -3\end{pmatrix}$.

(b) On trouve $\ker(f)=\{0\}$, on en déduit $\mathrm{Im}(f)=\mathbb{R}^3$ et que f est un isomorphisme.
(c) On cherche λ tel que $\det(M-\lambda I_3)=0$, le polynôme caractéristique est $\chi_M(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$. Ainsi $\mathrm{Sp}(f)=\{\pm1\}$.
(d) On trouve $E_1=\mathrm{Vect}(a)$ et $E_{-1}=\mathrm{Vect}(\mathrm{b,c})$ où $a=(2,-1,-1)$, $b=(1,0,-1)$ et $c=(0,1,0)$

(e) Soit $x \in E_1 \cap E_{-1}$, on a $f(x) = x$ et $f(x) = -x$, ainsi $x = -x$, ie. $2x = 0$, ce qui montre bien que $x = 0$. On a montré que $E_1 \cap E_{-1} = \{0\}$. De plus E_1 est de dimension 1 et E_{-1} est de dimension 2, comme $1 + 2 = 3$ il en résulte que : $E = E_1 \oplus E_{-1}$

(f) (a, b, c) est la base sympathique (base par concaténation de bases de deux sev supplémentaires) et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(g) C'est la symétrie par rapport à E_1 et parallèlement à E_{-1}

(h) On a : $M = PDP^{-1}$, ainsi $M^n = PD^nP{-}1$. Or D^n vaut I_3 si n est pair et D si n est impair, on a donc $M^n = I_3$ si n est pair et $M^n = M$ si n est impair.
Remarque : C'est une symétrie, c'est donc normal d'avoir $M^2 = I_3$, les autres puissances suivent.

2° (a) On trouve $c_1 = 5$ et $c_2 = 25 - 6 = 19$.

(b) On développe par rapport à la dernière colonne puis par rapport à la dernière ligne ce qui donne $c_{n+2} = 5c_{n+1} - 6c_n$

(c) Ainsi (c_n) est suite récurrente linéaire d'ordre 2, son équation caractéristique est $X^2 - 5X + 6$ qui admet 2 et 3 comme racine, ainsi il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $c_n = \alpha 3^n + \beta 2^n$, or les valeurs calculées en a) donnent : $3\alpha + 2\beta = 5$ et $9\alpha + 4\beta = 19$, on en déduit donc que $3\alpha = 9$ et $-2\beta = 4$, ie $(\alpha, \beta) = (3, -2)$, on en déduit donc que : $\forall n \in \mathbb{N}^\star, c_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

3° L'intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$, or pour tout t, $|\exp(-t)\sin t| \leq \mathrm{e}^{-t}$, comme $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ converge l'intégrale converge. Pour le calcule on procède par double IPP (on a convergence des crochets : à rédiger proprement), et on trouve $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t)\sin t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. On peut aussi remarquer que $\frac{-1}{2}(\cos(t) + \sin(t))\exp(-t)$ est une primitive de ce qui est sous l'intégrale.

4° (a) La fonction $t \mapsto \sin t \exp(-t^2)$ est continue sur $\mathbb{R}$, ainsi l'intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$ et $-\infty$. Cette fonction étant impaire on peut se contenter d'étudier l'intégrabilité en $+\infty$.
Étude en $+\infty$: On a, pour $t \geq 1$, $|\sin(t)\mathrm{e}^{-t^2}| \leq \mathrm{e}^{-t^2} \leq \mathrm{e}^{-t}$, or $\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente. L'intégrale est donc absolument convergente donc convergente. On a aussi la convergence en $-\infty$ par parité.

(b) C'est une intégrale de Bertrand divergente. Attention toutefois, les intégrales (comme les séries) de Bertrand étant HP, il faut le démontrer.
La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{\sqrt{t}}$ est continue sur $[1, +\infty[$, l'intégrale n'est généralisée qu'en $+\infty$. De plus $\dfrac{1}{\sqrt{t}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}\right)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann divergente, il en va de même pour $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

(c) La fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)}$ est continue sur $]0, +\infty[$, l'intégrale n'est donc généralisée qu'en 0 et en $+\infty$.
En $+\infty$, on a $\frac{1}{\sqrt{t}(t+1)} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{3/2}}$, ainsi $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(t+1)}$ est convergente par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente (et elle est de signe constant).
En 0, on a $\frac{1}{\sqrt{t}(t+1)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t^{1/2}}$ ainsi $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(t+1)}$ est convergente par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente (et elle est de signe constant).
En conclusion $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(t+1)}$ est convergente

---

Exercice 2 *(*E3A PC*, exercice 4, 2020)*.

1. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq I_n$ et $M \neq \frac{1}{2}I_n$, vérifiant la relation :

$$2M^2 = 3M - I_n.$$

1.1 On note $F = \mathrm{Vect}(I_n, M, M^2)$. Prouver que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k \in F$.
Déterminer la dimension de F et en donner une base.

1.2 Vérifier que F est stable pour la multiplication des matrices.

1.3 Soient $A = M - I_n$ et $B = M - \frac{1}{2}I_n$.
Justifier que $\mathcal{B} = (A, B)$ constitue une base de F.
Déterminer les composantes des matrices AB, BA, A^2 et B^2 dans la base $\mathcal{B}$.

1.4 Déterminer toutes les matrices T de F vérifiant $T^2 = M$.

2. Soit X une variable aléatoire réelle telle que l'on a :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad 2\mathbb{P}(X = n+2) = 3\mathbb{P}(X = n+1) - \mathbb{P}(X = n).$$

2.1 On note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$. Exprimer p_n en fonction de n.
En déduire la loi de la variable aléatoire X.

2.2 Justifier que la variable aléatoire X possède une espérance et une variance et les calculer.
On pourra admettre que si $q \in]-1,1[$, alors $\sum nq^{n-1}$ converge et que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$, et que $\sum n(n-1)q^{n-2}$ converge aussi et que $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

Correction :

1. 1.1 Montrons par récurrence double sur $k \in \mathbb{N}$ que $M^k \in F$.
Initialisation : par construction de F on a $M^0 = I_n$ et $M^1 = M$ dans F (et même M^2), ainsi la propriété est vrai au rang 0 et 1.
Hérédité : on suppose la propriété au rang k et $k-1$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^\star$, ie on suppose $M^k \in F$ et $M^{k-1} \in F$.
On a $M^{k+1} = M^2M^{k-1} = (\frac{3}{2}M - \frac{1}{2}I_n)M^{k-1} = \frac{3}{2}M^k - \frac{1}{2}M^{k-1} \in F$ (par hypothèse de récurrence et car F est un ev).
On a bien montré par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k \in F$.
Comme M^2 est combinaison linéaire de M et de I_n, on en déduit que $F = \mathrm{Vect}(I_n, M)$. Montrons que (I_n, M) est une famille libre, procédons par l'absurde :
On suppose que M et I_n sont liés, comme $I_n \neq 0$, on aurait l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda I_n$. En injectant dans le relation vérifiée par M on en déduit que $2\lambda^2 I_n = 3\lambda I_n - I_n$, ainsi $(2\lambda^2 - 3\lambda + 1)I_n = 0$, donc $2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$, ce qui implique que $\lambda = 1$ ou $\lambda = \frac{1}{2}$, or ces deux possibilités sont exclus. Ainsi (I_n, M) est une famille libre, comme elle est génératrice de F c'est donc une base de F. En particulier $\dim(F) = 2$.

   1.2 Soit $(N, N') \in F^2$, il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2$ tels que $N = \alpha I_n + \beta M$ et $N' = \alpha' I_n + \beta' M$, on en déduit donc que $NN' = \alpha\alpha' I_n + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)M + \beta\beta' M^2 \in F$ (par définition initiale de F), ainsi F est stable par produit.

   1.3 Tout d'abord on remarque que A et B sont dans F, montrons maintenant que (A, B) est une famille libre.
Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha A + \beta B = 0$, ainsi $\alpha(M - I_n) + \beta(M - \frac{1}{2}I_n) = 0$, ie $(\alpha+\beta)M + (-\alpha - \frac{1}{2}\beta)I_n = 0$, comme la famille (M, I_n) est libre, on en déduit que $\alpha + \beta = 0$ et $-\alpha - \frac{1}{2}\beta = 0$, donc $\alpha = \beta = 0$. La famille (A, B) est donc une famille libre de F, comme elle est constituée de deux vecteurs et comme F est de dimension 2, on en déduit que (A, B) est une base de F.
On a $AB = (M - I_n)(M - \frac{1}{2}I_n) = M^2 - \frac{3}{2}M + \frac{1}{2} = 0$, de même $BA = 0$.
On a $A^2 = M^2 - 2M + I_n = \frac{3}{2}M - \frac{1}{2}I_n - 2M + I_n = \frac{-1}{2}M + \frac{1}{2}I_n = \frac{-1}{2}A$.
On a $B^2 = M^2 - M + \frac{1}{4}I_n = \frac{3}{2}M - \frac{1}{2}I_n - M + \frac{1}{4}I_n = \frac{1}{2}M - \frac{1}{4}I_n = \frac{1}{2}B$.

   1.4 Soit $T \in F$, il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $T = \alpha A + \beta B$. Ainsi $T^2 = \alpha^2 A^2 + \alpha\beta AB + \beta\alpha BA + \beta^2 B = \frac{1}{2}(-\alpha^2 A + \beta^2 B)$. Or $M = -A + 2B$, ainsi on a l'équivalence (la deuxième c'est car (A, B) base de F) :
$T^2 = M \iff \frac{1}{2}(-\alpha^2 A + \beta^2 B) = -A + 2B \iff \begin{cases} -\alpha^2/2 & = -1 \\ \beta^2/2 & = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha^2 & = 2 \\ \beta^2 & = 4 \end{cases}$.
Ainsi l'équation $T^2 = M$ possède 4 solutions : $\sqrt{2}A + 2B$, $\sqrt{2}A - 2B$,$-\sqrt{2}A + 2B$ et $-\sqrt{2}A - 2B$

2. 2.1 On remarque tout de suite que p_n est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, en effet pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $2p_{n+2} = 3p_{n+1} - p_n$.
Son équation caractéristique $2r^2 - 3r + 1 = 0$ admet deux racines 1 et $\frac{1}{2}$. Ainsi il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $p_n = \frac{\alpha}{2^n} + \beta$.
Comme on sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_n = 1$ (X est une variable aléatoire), et comme on sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$, on en déduit que $\alpha = 2$ et $\beta = 0$.
On a donc montré : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2^{n+1}}$.

   2.2 Avec le rajout (série géométrique dérivée), on a tout de suite que $\sum n\mathbb{P}(X = n)$ converge absolument et $\displaystyle\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{4}\frac{1}{(1-1/2)^2} = 1$.
On en déduit aussi tout de suite que $\sum n(n-1)\mathbb{P}(X = n)$ converge absolument et $\displaystyle\mathbb{E}(X(X-1)) = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{8}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\frac{1}{2^{k-2}} = \frac{1}{8}\frac{2}{(1-1/2)^3} = 2$.
Ainsi X^2 est d'espérance finie et $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) = 3$. On en conclue ensuite que X possède une variance, la formule de Koenig-Huygens donne $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 3 - 1 = 2$.

Exercice 3 *(E3A MP, Maths B, 2014)*.
On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit n un entier naturel non nul et soit $E = \mathbb{K}^n$. Pour tout endomorphisme u de E, on note $\mathrm{Ker}(u)$ le noyau de u et $\mathrm{Im}(u)$ l'image de u.

1° Question de cours : Soient u et v deux endomorphismes qui commutent. Démontrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

Dans la suite de l'exercice, u désigne un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$.

2° Démontrer que $\mathrm{Im}(u)$ est contenu dans $\mathrm{Ker}(u)$.

3° Quelle inégalité obtient-on ainsi sur le rang de u ? On citera précisément le théorème utilisé.

4° On suppose ici que $n = 2$, soit $E = \mathbb{K}^2$. On suppose ici u non nul.

(a) Démontrer qu'il existe une droite D dans E telle que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u) = D$.

(b) Soit v un endomorphisme de E tel que $v^2 = 0$ et $u \circ v = v \circ u$.

i. Démontrer que $v(D) \subset D$.

ii. Démontrer que $u \circ v = 0$.

(c) Soient v et w deux endomorphismes de E tels que $v^2 = 0$, $w^2 = 0$, $u \circ v = v \circ u$ et $u \circ w = w \circ u$.
Démontrer que $v \circ w = 0$.

5° On revient au cas général. Soit m un entier naturel ≥ 2. Soient $u_1, \dots, u_m$ des endomorphismes de E tels que :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, m\}^2,\ u_i^2 = 0 \text{ et } u_i \circ u_j = u_j \circ u_i.$$

On pose $F_1 = \mathrm{Im}(u_1)$ et pour un entier i compris entre 2 et m, $F_i = \mathrm{Im}(u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_{i-1} \circ u_i)$.

(a) Démontrer que, pour tout entier i compris entre 1 et $m-1$, F_i est un sous-espace vectoriel stable par u_{i+1}.

(b) En déduire que, pour tout entier i compris entre 1 et m, F_i est de dimension au plus $\frac{n}{2^i}$.

(c) Dans le cas où $n < 2^m$, démontrer que l'endomorphisme $u_1 \circ u_n \circ \cdots \circ u_m = 0$.

6° (**Bonus** : Ne traiter que s'il vous reste du temps)
On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dans ce paragraphe. Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ usuel :

$$\langle (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Pour toute matrice A, on note $\mathrm{Ker}(A)$ le noyau de A, et $\mathrm{Im}(A)$ l'image de A.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $A^\top$ la matrice transposée de A.

(a) (rajout) On note $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire. Montrer que : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top X = \|X\|^2$

(b) Démontrer que $E = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A^\top)$.

(c) On suppose de plus $A^2 = 0$. Démontrer que $\mathrm{Im}(A + A^\top) = \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(A^\top)$.

Correction :

1° Soit u et v deux endomorphismes qui commutent.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$. On a $u(v(x)) = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(u(x)) = v(0) = 0$, ainsi $v(x) \in \mathrm{Ker}(u)$, ce qui montre que $v(\mathrm{Ker}(u)) \subset \mathrm{Ker}(u)$, ie. que $\mathrm{Ker}(u)$ est stable par v.
Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$, il existe donc $x \in E$ tel que $y = u(x)$, ainsi $v(y) = v(u(x)) = v \circ u(x) = u \circ v(x) = u(v(x))$, donc $v(y) \in \mathrm{Im}(u)$, ce qui montre que $v(\mathrm{Im}(u)) \subset \mathrm{Im}(u)$, ie. que $\mathrm{Im}(u)$ est stable par v.

2° Soit $y \in \mathrm{Im}(y)$, il existe donc $x \in E$ tel que $y = u(x)$, ainsi $u(y) = u(u(x)) = u^2(x) = 0$ puisque $u^2 = 0$, ainsi $y \in \mathrm{Ker}(u)$, ce qui montre bien que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

3° Comme u est un endomorphisme de E et que E est de dimension n on a : $\mathrm{rg}(u) + \dim \mathrm{Ker}(u) = n$, d'après la question précédente on a $\mathrm{rg}(u) \leq \dim \mathrm{Ker}(u)$, ainsi $\mathrm{rg}(u) \leq n - \mathrm{rg}(u)$, ie $\mathrm{rg}(u) \leq \frac{n}{2}$.

4° On suppose ici que $n = 2$, soit $E = \mathbb{K}^2$. On suppose ici u non nul.

(a) Comme u est non nul on a $\mathrm{rg}(u) \geq 1$, la question 3° ne dit rien d'autre que $\mathrm{rg}(u) \leq 1$, ainsi $\mathrm{rg}(u) = 1$, posons $D = \mathrm{Im}(u)$ (qui est bien une droite puisque de dimension 1). Or, d'après le théorème du rang, on a $\dim \mathrm{Ker}(u) = 1$, on a donc, d'après 2°, $D \subset \mathrm{Ker}(u)$, comme ils ont la même dimension ils sont donc égaux. On a bien $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u) = D$.

(b) Soit v un endomorphisme de E tel que $v^2 = 0$ et $u \circ v = v \circ u$.

i. u et v commutent, donc $D = \mathrm{Im}(u)$ est stable par v d'après 1°, ainsi : $v(D) \subset D$.

ii. Soit x un vecteur directeur de D (ie. $x \neq 0$ et $D = \mathrm{Vect}(x)$), ainsi, d'après la question précédente, on a $v(x) \in D$, il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $v(x) = \lambda x$, on en déduit donc $v^2(x) = \lambda x$, donc $0 = \lambda x$ et comme $x \neq 0$ on a nécessairement $\lambda = 0$. Ce qui montre que $v(x) = 0$. Il y a deux possibilités :
— l'application v est nulle, dans ce cas on a bien $u \circ v = 0$;
— l'application v est non nulle, alors $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(v) = D$ (la première égalité se montre en faisant la même chose à v que ce que l'on a fait à u dans la question 4° (a), pour la seconde comme $x \in \mathrm{Ker}(v)$, on a $D \subset \mathrm{Ker}(v)$ et donc, par égalité des dimensions $D = \mathrm{Ker}(v)$). En particulier $\mathrm{Im}(v) = \ker(u)$, ce qui montre bien que $u \circ v = 0$.

(c) On reprend les deux possibilités pour v de 4°(b)ii. :
— Cas 1 : $v = 0$. Dans ce cas on a bien $v \circ w = 0$.
— Cas 2 : $v \neq 0$ et $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(v) = D$, on applique ce qu'on a fait au couple (u, v) dans la question 4° (b) au couple (v, w) et on btient $v \circ w = 0$.

5° On revient au cas général. Soit m un entier naturel ≥ 2. Soient $u_1, \dots, u_m$ des endomorphismes de E tels que :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, m\}^2,\ u_i^2 = 0 \text{ et } u_i \circ u_j = u_j \circ u_i.$$

On pose $F_1 = \mathrm{Im}(u_1)$ et pour un entier i compris entre 2 et m, $F_i = \mathrm{Im}(u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_{i-1} \circ u_i)$.

(a) Soit $i \in [\![1, m-1]\!]$, posons $v_i = u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_{i-1} \circ u_i$, l'endomorphisme u_{i+1} commute avec v_i (on le fait commuter avec u_i, puis u_{i-1}, ..., puis u_1), donc, d'après 1°, $F_i = \mathrm{Im}(v_i)$ est stable par u_{i+1}.

(b) Montrons par récurrence sur $i \in [\![1, m]\!]$ que $\dim(F_i) \leq \frac{n}{2^i}$.
Initialisation : Déjà fait à la question 3°.
Hérédité : On suppose, pour un certain $i \in [\![1, m-1]\!]$ que $\dim(F_i) \leq \frac{n}{2^i}$.
Comme F_i est stable par u_{i+1} on peut considérer l'endomorphisme $\tilde{u}_{i+1}$ induit par u_{i+1} sur F_i. On a toujours $\tilde{u}_{i+1}^2 = 0$, en appliquant 3° à cet endomorphisme on a $\mathrm{rg}(\tilde{u}_{i+1}) \leq \frac{\dim(F_i)}{2}$ et donc, par hypothèse de récurrence, que $\mathrm{rg}(\tilde{u}_{i+1}) \leq \frac{n}{2^{i+1}}$. Comme u_{i+1} commute avec tous les u_k, on a $F_{i+1} = \mathrm{Im}(u_{i+1}(u_1 \circ \cdots \circ u_i)) = u_{i+1}(\mathrm{Im}(u_1 \circ \cdots \circ u_i)) = u_{i+1}(F_i) = \mathrm{Im}(\tilde{u}_{i+1})$. Ce qui montre bien que $\dim(F_{i+1}) \leq \frac{n}{2^{i+1}}$. Ce qui termine l'hérédité et la récurrence.

(c) On suppose $n < 2^m$, d'après la question précédente $\dim F_m \leq \frac{n}{2^m} < 1$, ainsi $F_m = \{0\}$, or il n'y a que l'endomorphisme nul qui a $\{0\}$ comme image, ce qui montre bien que $u_1 \circ u_n \circ \cdots \circ u_m = 0$.

6° (a) Soit X le vecteur colonne correspondant à $(x_1, \dots, x_n)$. On a $X^\top X = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \langle X | X \rangle = \|X\|^2$.

(b) Comme une matrice et sa transposée ont le même rang, le théorème du rang nous dit que $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A^\top)) = \dim(E)$, il ne reste plus qu'a montrer que l'intersection est réduite à zéro pour montrer qu'ils sont supplémentaires. Soit $X \in \mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}(A^\top)$, on a donc $AX = 0$ et il existe Y tel que $X = A^\top Y$, on en déduit donc que $AA^\top Y = 0$, ainsi $Y^\top AA^\top Y = 0$, ie $X^\top X = 0$, ie. $\|X\| = 0$ et donc $X = 0$. Ce qui montre que $\mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Im}(A^\top)$, et qui termine donc de montrer que $E = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}(A^\top)$.

(c) Soit $Y \in \mathrm{Im}(A + A^\top)$, il existe donc $X \in E$ tel que $Y = (A + A^\top)X = AX + A^\top X$, donc $Y \in \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(A^\top)$, ce qui montre qu'on a $\mathrm{Im}(A + A^\top) \subset \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(A^\top)$.

Soit $Y \in \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(A^\top)$, il existe donc $(X, X') \in E^2$ tel que $Y = AX + A^\top X'$. D'après la question précédente il existe $(X_1, X_2) \in \mathrm{Ker}(A) \times \mathrm{Im}(A^\top)$ tel que $X = X_1 + X_2$ et il existe $(X_1', X_2') \in \mathrm{Ker}(A) \times \mathrm{Im}(A^\top)$ tel que $X' = X_1' + X_2'$. Il s'en suit que $Y = A(X_1 + X_2) + A^\top(X_1' + X_2')$. On a $AX_1 = 0$ (et $AX_1' = 0$), de plus $A^2 = 0$ implique $(A^\top)^2 = 0$ et donc que $\mathrm{Im}(tA) \subset \mathrm{Ker}(A^\top)$, ainsi $A^\top X_2' = 0$ (et $A^\top X_2 = 0$). On a donc : $Y = AX_2 + A^\top X_1'$, de plus on sait que $0 = AX_1'$ et $0 = A^\top X_2$, en sommant ces trois dernières égalités on a $Y = A(X_1' + X_2) + A^\top(X_1' + X_2)$, ie $Y = (A + A^\top)(X_1' + X_2)$, ce qui montre bien que $\mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(A^\top) \subset \mathrm{Im}(A + A^\top)$.

On a bien montré, par double inclusion, que : $\mathrm{Im}(A + A^\top) = \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(A^\top)$.

Exercice 4 *(Préambule et partie I de :* BANQUE PT, *Maths C,* 2019*)*.

Préambule

1° Soit h la fonction qui, à tout réel x strictement positif associe : $\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$.
Montrer que h est constante sur $]0, +\infty[$. (On précisera la valeur prise par h sur $]0, +\infty[$.)

2° (a) Pour tout réel t de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, exprimer $\cos t$ en fonction de $\cos \dfrac{t}{2}$

(b) Pour tout réel t de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, comparer $\dfrac{1}{1+\tan^2 \frac{t}{2}}$ et $\cos^2 \dfrac{t}{2}$.

(c) Pour tout réel t de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on pose $u = \tan \dfrac{t}{2}$.
On demande d'exprimer $\cos t$ en fonction de u.

Partie I

Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \sin^n(x) \mathsf{d}x.$$

3° (a) Montrer que pour tout entier naturel n, l'intégrale I_n est convergente.

(b) Que vaut I_0 ?

(c) Donner une primitive de la fonction, qui a tout réel positif x, associe : $\mathrm{e}^{-x}\cos(x)$ (on pourra utiliser la fonction à valeurs complexes $x \mapsto \mathrm{e}^{-x} e^{\mathrm{i}x}$).

(d) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, montrer, à l'aide d'une double intégration par parties, la relation :

$$I_n = \frac{n(n-1)}{n^2+1} I_{n-2}.$$

(e) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de I_{2n} en fonction de n et du produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(4k^2+1)$.

4° (a) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $u_n = \ln \dfrac{2n(2n-1)}{4n^2+1}$. Étudier la nature de la série de terme général u_n.

(b) Pour tout entier naturel non nul n, comparer $\ln I_{2n}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

(c) Quelle est la limite de la suite de terme général I_{2n} ?

Correction :

Préambule

1° la fonction h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$: $h'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$, ainsi h est constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et la valeur prise par h est $h(1) = 2\arctan(1) = \frac{\pi}{2}$.

2° (a) Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos t = \cos\left(2\frac{t}{2}\right) = 2\cos^2 \frac{t}{2} - 1$.

(b) Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, comme $\frac{t}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, on a que $\tan \frac{t}{2}$ est bien défini, et :

$$\frac{1}{1+\tan^2 \frac{t}{2}} = \frac{1}{\frac{\cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}}{\cos^2 \frac{t}{2}}} = \frac{\cos^2 \frac{t}{2}}{1} = \cos^2 \frac{t}{2}.$$

(c) Pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a (d'après les deux questions précédentes) : $\cos t = 2\cos^2 \frac{t}{2} - 1 = \frac{2}{1+u^2} - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2}$.

Partie I

3° (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto e^{-x}\sin^n(x)$ est continue sur $[0, +\infty[$. L'intégrale n'est généralisée qu'en en $+\infty$.

Pour tout $x \geq 0$, $|\mathrm{e}^{-x}\sin^n(x)| \leq \mathrm{e}^{-x}$ comme $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \mathsf{d}x$ converge (d'après le cours), en on déduit par théorème de majoration, les fonctions misent en jeu étant positives, que $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\mathrm{e}^{-x}\sin^n(x)| \mathsf{d}x$ converge.

Ce qui montre bien que l'intégrale I_n est convergente pour tout entier n.

(b) On a : $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} \mathsf{d}x = \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^{+\infty} = 1$.

(c) Pour $x \in \mathbb{R}$, notons $f(x) = \mathrm{e}{-x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}$, ainsi $\mathrm{e}^{-x}\cos(x) = \mathrm{Re}(f(x))$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, notons $F(x) = \frac{\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}}{-1+\mathrm{i}} = \frac{-1-\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{-x}(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))$, ainsi F une primitive de f sur $\mathbb{R}$, ainsi $x \mapsto \mathrm{Re}(f(x)) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(-\cos(x) + \sin(x))$ est une primitive de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}\cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.

(d) Soit $n \geq 2$. Les fonctions $x \mapsto -\mathrm{e}^{-x}$ et $x \mapsto \sin^n(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. De plus $\lim_{x\to+\infty} -e^{-x}\sin^n(x) = 0$ (ie le crochet converge), donc par intégration par parties I_n et $-n\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos(x)\sin^{n-1}(x)\mathrm{d}x$ sont de même nature, donc convergentes. De plus on a :

$$I_n = \Big[-\mathrm{e}^{-x}\sin^n(x)\Big]_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos(x)\sin^{n-1}(x)\mathrm{d}x = n\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos(x)\sin^{n-1}(x)\mathrm{d}x.$$

Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(-\cos(x)+\sin(x))$ et $x \mapsto \sin^{n-1}(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$. De plus $\lim_{x\to+\infty} -\mathrm{e}^{-x}(-\cos(x)+\sin(x))\sin^{n-1}(x) = 0$ (ie le crochet converge), donc par intégration par parties, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos(x)\sin^{n-1}(x)\mathrm{d}x$ et $\dfrac{1}{2}(n-1)\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}(-\cos(x)+\sin(x))\cos(x)\sin^{n-2}(x)\mathrm{d}x$ sont de même nature, donc convergentes. De plus on a : $(-\cos(x)+\sin(x))\cos(x)\sin^{n-2} = \cos(x)\sin^{n-1}(x) - \cos^2(x)\sin^{n-2} = \cos(x)\sin^{n-1}(x) + \sin^n(x) - \sin^{n-2}(x)$.

Les intégrales généralisées misent en jeu étant convergentes on a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos(x)\sin^{n-1}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{e}^{-x}(-\cos(x)+\sin(x))\sin^{n-1}(x)\Big]_0^{+\infty} - \frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos(x)\sin^{n-1}(x)\mathrm{d}x - \frac{n-1}{2}I_n + \frac{n-1}{2}I_{n-2}$. On en déduit que $\displaystyle\frac{n+1}{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos(x)\sin^{n-1}(x)\mathrm{d}x = -\frac{n-1}{2}I_n + \frac{n-1}{2}I_{n-2}$.

Ainsi, $(n+1)I_n = -n(n-1)I_n + n(n-1)I_{n-2}$, d'où $(n^2+1)I_n = n(n-1)I_{n-2}$ et $I_n = \frac{n(n-1)}{n^2+1}I_{n-2}$.

(e) Pour $n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \frac{2n(2n-1)}{4n^2-1}\frac{(2n-2)(2n-3)}{4(n-1)^2+1}\dots\frac{2.1}{2^2+1}I_0$, on peut donc (avec $I_0 = 1$), conjecturer que : $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{\prod_{k=0}^n(4k^2+1)}$. Montrons cette conjecture par récurrence sur n.

La relation est vraie pour $n=0$. Si on la suppose vraie au rang n, on obtient au rang $n+1$: $I_{2n+2} = \dfrac{2n(2n-1)}{(2n+2)^2+1}I_{2n} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)((2n)!)}{(4(n+1)^2+1)\prod_{k=0}^n(4k^2+1)} = \dfrac{(2n+2)!}{\prod_{k=0}^{n+1}(4k^2+1)}$.

Ce qui montre l'hérédité et le résultat : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{\prod_{k=0}^n(4k^2+1)}$.

4° (a) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $\frac{2n(2n-1)}{4n^2+1} = \frac{1-\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{4n^2}} > 0$. Ainsi $u_n = \ln\left(1-\frac{1}{2n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{4n^2}\right) = \frac{-1}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n}$.
Ainsi (u_n) est de signe constant et u_n est équivalent au terme général d'une série de Riemann divergente. Ainsi par théorème d'équivalence, $\sum u_n$ diverge.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $\ln(I_{2n}) = \ln\left(\dfrac{(2n)!}{\prod_{k=0}^n(4k^2+1)}\right) = \ln(\displaystyle\prod_{k=1}^n(2k)(2k-1)) - \ln(\prod_{k=0}^n(4k^2+1))$.

Ainsi $\ln(I_{2n}) = \ln\left(\displaystyle\prod_{k=1}^n(2k)(2k-1)\right) - \ln\left(\prod_{k=1}^n(4k^2+1)\right) = \sum_{k=1}^n \ln(2k(2k-1)) - \ln(4k^2+1) = \sum_{k=1}^n u_k$.

(c) La suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n u_k\right)$ diverge, comme elle est décroissante (suite des somme partielles d'une suite à termes négatifs) elle diverge donc vers $-\infty$. On en déduit que : $\lim_{n\to+\infty}\ln(I_{2n}) = -\infty$. Par composition par la fonction exponentielle, on en déduit que (I_{2n}) converge vers 0.

Exercice 5 *(Intégrale de Dirichlet, partie 4* CCP *PSI 2014).*

1° (a) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est convergente.

(b) Montrer que pour tout $x \geq 1$, on a

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$$

En déduire que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est convergente.

(c) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}\,dt$ est convergente.

(d) Montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}\,dt$ est divergente. En déduire la divergence de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\,dt$.

2° On désigne par g la fonction définie sur $]0,1]$ par $g(t) = \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)$ et par f la fonction définie sur le même intervalle par $f(x) = \int_x^1 g(t)\,dt$.

(a) Montrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0. On notera encore f ce prolongement.

(b) Montrer que f est continue sur $[0,1]$ et indéfiniment dérivable sur $]0,1]$.

(c) Montrer que

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 |g(t)|\,dt = +\infty$$

3° Pour $x \in]0,1]$, justifier que f est dérivable sur $[x,1]$ et donner f'.
On note $\lambda(x) = \int_1^x \sqrt{1+(f'(t))^2}\mathrm{d}t$. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0^+} \lambda(x) = +\infty$.

Remarque : Le dernier résultat est "inattendu", f est continue sur $[0,1]$ et $\lambda(x)$ est la longueur de la courbe représentative de la fonction f sur le segment $[x,1]$.

Correction :

1° (a) $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0,1]$ et tend vers 1 en 0. Elle est donc prolongeable en une fonction continue sur le segment $[0,1]$ et $\int_0^1 f$ existe (intégrale faussement généralisée).

(b) On opère une intégration par partie en primitivant sin en $-\cos$ et en dérivant $t \mapsto \frac{1}{t}$ en $t \mapsto -\frac{1}{t^2}$ (les fonctions misent en jeux sont de classe C^1 sur $[1,x]$). On obtient directement

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x} - \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$$

On a $\dfrac{\cos(t)}{t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^{3/2})$ au voisinage de $+\infty$. C'est donc (comparaison à Riemann) une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$. L'intégrale du membre de droite admet donc une limite quand $x \to +\infty$. De plus, $\cos(x)/x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \to 0$ (car cos est bornée). Finalement, on a l'existence de

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt = \cos(1) - \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$$

(c) On a de même

$$\int_1^x \frac{\cos(2t)}{t}\,dt = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos(2x)}{x} - \sin(2)\right) + \int_1^x \frac{\sin(2t)}{t^2}\,dt$$

$t \mapsto \frac{\sin(2t)}{t^2} = o(1/t^{3/2})$ au voisinage de $+\infty$. C'est donc (comparaison à Riemann) une fonction intégrable au voisinage de $+\infty$. Comme à la question précédente, on a l'existence de

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t}\,dt = -\frac{\sin(2)}{2} + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t^2}\,dt$$

(d) On a $\frac{\sin^2(t)}{t} = \frac{1}{2t} - \frac{\cos(2t)}{2t}$ et donc

$$\int_1^x \frac{\sin^2(t)}{t}\,dt = \frac{\ln(x)}{2} - \int_1^x \frac{\cos(2t)}{2t}\,dx$$

et cette quantité tend vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$. Ainsi, l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t}\,dt$ est divergente. Comme $\frac{\sin^2(t)}{t} \geq 0$, ceci revient à dire que $t \mapsto \frac{\sin^2(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1,\infty[$. Or, $|\sin| \geq \sin^2 \geq 0$ et donc $t \mapsto \frac{|\sin(t)|}{t}$ n'est pas intégrable non plus sur $[1,+\infty[$. Et comme cette fonction est positive, ceci revient à dire que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\,dt$ diverge.

2° (a) $t \mapsto 1/t$ est de classe C^1 sur $[x,1]$ pour $x > 0$. On peut donc poser le changement de variable $u = 1/t$. Il indique que

$$f(x) = \int_x^1 \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)\,dt = \int_1^{1/x} \frac{\sin(u)}{u}\,du$$

Avec les questions précédente, f est prolongeable par continuité en 0 en posant

$$f(0) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,du$$

(b) g est continue sur $]0,1]$, $]0,1]$ est un intervalle qui contient 1. Par théorème fondamental, $-f \ : \ x \mapsto \int_1^x g(t)\,dt$ est une primitive de g sur $]0,1]$. Comme g est de classe C^∞ sur $]0,1]$, $-f$, et donc f, l'est aussi. On a vu (ou imposé par choix de $f(0)$) la continuité en 0.

(c) Le même calcul que plus haut donne

$$\int_x^1 |g(t)|\,dt = \int_1^{1/x} \frac{|\sin(u)|}{u}\,du$$

On a vu que l'intégrale de $u \mapsto \frac{|\sin(u)|}{u}$ n'existe pas sur $[1,+\infty[$. Comme cette fonction est positive, son intégrale entre 1 et a tend vers $+\infty$ quand $a \to +\infty$. Ainsi

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 |g(t)|\,dt = +\infty$$

3° Par théorème fondamentale, comme g est continue sur $[x,1]$, f est la primitive de $-g$ qui s'annule en 1, ainsi f est dérivable sur $[x,1]$ et $f' = -g$.
Pour conclure il suffit de remarquer que $\sqrt{1+g^2} \geq \sqrt{g^2} = |g|$ et d'utiliser la question précédente.