

DNS 4^{*} : pour le jeudi 22 novembre

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1 (MINES PONT PC, Maths 1, 2014) **Somme de projecteurs.**

1 Traces et projecteurs

Correction : On remarquera que cette partie est essentiellement constituée de questions de cours.

- $\text{tr}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} b_{i,j} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{i,j} a_{i,j} = \text{tr}(\mathbb{B}\mathbb{A})$
- Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de X . Soient Q la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a alors : $\mathbb{T}_{\mathcal{B}'} = Q^{-1} \mathbb{T}_{\mathcal{B}} Q$. En appliquant la question précédente avec $\mathbb{A} = Q^{-1} \mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ et $\mathbb{B} = Q$, on obtient : $\text{tr}(\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}) = \text{tr}(Q Q^{-1} \mathbb{T}_{\mathcal{B}}) = \text{tr}(\mathbb{T}_{\mathcal{B}})$.
- Comme P est un endomorphisme de X , $R(P)$ et $N(P)$ sont des sev de X . Comme on est en dimension finie on a, d'après le théorème du rang, que $\dim X = \dim(R(P)) + \dim(N(P))$, reste à montrer $R(P) \cap N(P) = \{0_X\}$. On a $0 \in R(P) \cap N(P)$, réciproquement si $y \in R(P) \cap N(P)$ on a d'une part $P(y) = 0_X$ et d'autre part l'existence d'un $x \in X$ tel que $y = P(x)$. Ainsi $P^2(x) = 0$, donc (en effet P est un projecteur, on a : $P^2 = P$) $P(x) = 0_X$, ie $y = 0_X$, ce qui termine de montrer que $R(P) \cap N(P) = \{0_X\}$. On a donc bien montré que $X = R(P) \oplus N(P)$.
- On remarque que si $y \in R(P)$ alors $P(y) = y$ (en effet il existe $x \in X$ tel que $y = P(x)$, ainsi $P(y) = P^2(x) = P(x) = y$), ainsi la matrice de P dans une base adaptée à la décomposition précédente est :

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array} \right)$$

où on a noté $r = \text{rg}(P) = \dim R(P)$. Cette matrice est de trace r , comme la trace est indépendant de la base on a bien $\text{rg}(P) = \text{tr}(P)$.

- Tout d'abord on vérifie que P' est un projecteur : $P'^2 = (I - P)^2 = I^2 - 2P + P^2 = I - P$ (car I et P commutent et car $P^2 = P$), ainsi P' est bien un projecteur, on pourra donc se contenter de ne montrer qu'une égalité (en échangeant les rôles de P et de P' (en effet $I - P' = I - (I - P) = P$). Soit $x \in R(P)$, on a $P(x) = x$ (cf. question précédente), ainsi $x \in N(P')$. Ce qui montre que $R(P) \subset N(P')$, réciproquement si $x \in N(P')$ alors $x - P(x) = 0$ d'où $x \in R(P)$. Ce qui montre l'autre inclusion. Ainsi $R(P) = N(P')$. Par symétrie on a $N(P) = R(P')$.
- La concaténation d'une base de F et d'une base de G est une famille génératrice de $F + G$, or cette base a $\dim(F) + \dim(G)$ éléments. Ainsi $\dim(F + G) \leq \dim F + \dim G$.
Remarque : On peut aussi appliquer le théorème du rang à l'application de $F \times G \rightarrow X$, $(x, y) \mapsto x + y$ qui a $F + G$ comme image. On peut aussi utiliser la formule de Grassmann.
- Par linéarité de la trace : $\text{tr}(S) = \text{tr}(P_1) + \dots + \text{tr}(P_m)$, ainsi d'après la question 4 : $\text{tr}(S) = \text{rg}(P_1) + \dots + \text{rg}(P_m)$. Ce qui montre bien que $\text{tr}(S) \in \mathbb{N}$. Pour l'inégalité on peut utiliser la question précédente en la généralisant en une somme finie (c'est une récurrence immédiate). Tout d'abord on remarque que si $y \in R(S)$, alors il existe $x \in X$ tel que $y = S(x)$. Ainsi $y = P_1(x) + \dots + P_m(x)$, ce qui montre que $R(S) \subset (R(P_1) + \dots + R(P_m))$. Comme on est en dimension finie on a donc $\dim(R(S)) \leq \dim(R(P_1) + \dots + R(P_m))$, d'où d'après la question 6 généralisée : $\text{rg}(S) \leq \dim(R(P_1)) + \dots + \dim(R(P_m))$. Or $\dim(R(P_1)) + \dots + \dim(R(P_m)) = \text{rg}(P_1) + \dots + \text{rg}(P_m) = \text{tr}(P_1) + \dots + \text{tr}(P_m) = \text{tr}(S)$, ce qui montre bien que $\text{rg}(S) \leq \text{tr}(S)$.

Remarque : Si on ne veut pas généraliser sans démonstration la question 6, on peut démontrer la généralisation, ou démontrer le résultat par récurrence sur le nombre m de projecteurs.

2 Projecteurs de rang 1

Correction :

8. Soit f_1 un élément non nul de $R(P)$: c'est donc une base de $R(P)$ puisque $\text{rg } P = 1$. Comme $P \circ T(f_1) = P(T(f_1))$, cet élément appartient à $R(P)$. Aussi il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $P \circ T(f_1) = \mu f_1$. Or pour tout x de X , $P(x)$ est colinéaire à f_1 (ie. il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) = \alpha f_1$) donc : $P \circ T \circ P(x) = P \circ T(\alpha f_1) = \mu \alpha f_1 = \mu P(x)$. Ce qui prouve que : $P \circ T \circ P = \mu P$.
9. Comme f_1 est dans $R(P)$, d'après ce qui précède, $P(f_1) = \mu f_1$. Comme $f_1 - P(f_1)$ est élément de $N(P) = \text{Vect}(f_2, \dots, f_n)$, cela justifie la forme de la première colonne de $\mathbb{T}_C$, les autres colonnes étant quelconques.
10. Par définition de P' , $\mathbb{P}'_C = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{O}_{1,n-1} \\ \hline \mathbb{O}_{n-1,1} & \mathbb{I}_{n-1} \end{array} \right)$. Si on écrit de la même façon, $\mathbb{T}_C = \left(\begin{array}{c|c} \mu & L \\ \hline C & \mathbb{B} \end{array} \right)$, un calcul en blocs donne alors $\mathbb{P}'_C \mathbb{T}_C = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{O}_{1,n-1} \\ \hline C & \mathbb{B} \end{array} \right)$. Ainsi $\mathbb{P}'_C \mathbb{T}_C \mathbb{P}'_C = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \mathbb{O}_{1,n-1} \\ \hline \mathbb{O}_{n-1,1} & \mathbb{B} \end{array} \right)$. On a ainsi :

$$P' \circ T \circ P' = \alpha P' \iff \mathbb{P}'_C \mathbb{T}_C \mathbb{P}'_C = \alpha \mathbb{P}'_C \iff \mathbb{B} = \alpha \mathbb{I}_{n-1}.$$

On a ainsi vérifié par contraposition que : $\mathbb{B}$ n'est pas la matrice d'une homothétie ssi $P' \circ T \circ P'$ n'est pas proportionnel à P' .

Remarque : il suffisait d'une implication donc de montrer que si $\mathbb{B} = \alpha \mathbb{I}_{n-1}$ alors $P' \circ T \circ P' = \alpha P'$.

3 Endomorphismes différents d'une homothétie

Correction :

11. On va montrer que si pour tout $x \in X$, on a $(x, T(x))$ liés alors T est une homothétie (dit autrement les homothéties sont les seuls endomorphismes laissant stable toutes les droites). Il existe donc pour tout $x \in X$ un coefficient $\alpha_x \in \mathbb{R}$ tel que $T(x) = \alpha_x x$. Soit u un vecteur non nul fixé et $\alpha = \alpha_u$. Si x (non nul) est colinéaire à u alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda u$, ainsi $T(x) = \lambda T(u) = \lambda \alpha u = \alpha x$, ainsi $\alpha_x = \alpha$. Si x n'est pas colinéaire à u , $u + x$ est non nul et $T(u + x) = T(u) + T(x) = \alpha u + \alpha_x x$, or $T(u + x) = \alpha_{u+x}(u + x)$, ainsi $(\alpha_x - \alpha_{u+x})x = (\alpha_{u+x} - \alpha)u$ comme (x, u) est libre on a $\alpha_x = \alpha_{u+x} = \alpha$. On a donc montré que pour tout x (pour le vecteur nul c'est bon) $T(x) = \alpha x$, ie T est une homothétie. Ainsi par contraposition si T n'est pas une homothétie alors il existe un vecteur x tel que $T(x)$ n'est pas colinéaire à x .
12. Soit e_1 un élément tel que e_1 et $T(e_1)$ ne soient pas colinéaires (un tel vecteur existe par la question précédente). On peut compléter cette famille libre en une base $\mathcal{B} = (e_1, T(e_1), e_3, \dots, e_n)$ de X et dans cette base T a la matrice recherchée.
13. On va procéder par récurrence sur n .

Initialisation : pour $n = 2$ on utilise la base de la question précédente, on a donc deux réels a et b tels que $\mathbb{T}_B = \left(\begin{array}{c|c} 0 & b \\ \hline 1 & d \end{array} \right)$, comme la trace est nulle on a $b = 0$, ce qui montre bien le résultat pour $n = 2$.

Hérédité : On considère un entier $n \geq 2$ pour lequel le résultat est vrai. Soit alors T un endomorphisme autre qu'une homothétie de trace nulle d'un espace vectoriel X de dimension $n + 1$. D'après la question précédente

il existe une base $\mathcal{B}$ tel que $\mathbb{T}_B = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & x & x & \cdots & x \\ \hline 1 & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & \mathbb{A} & & \\ 0 & & & & \end{array} \right)$. On a alors $\text{tr}(T) = \text{tr}(\mathbb{A})$, ainsi $\text{tr}(\mathbb{A}) = 0$. Si $\mathbb{A}$

est une matrice d'homothétie de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$, on a nécessairement $\lambda = 0$, ainsi $\mathbb{A} = \mathbb{O}$, ce qui termine l'hérédité dans ce cas. Si $\mathbb{A}$ n'est pas une homothétie, notons $\tilde{T}$ l'endomorphisme de $\tilde{X} = \text{Vect}(e_2, \dots, e_{n+1})$ de matrice $\mathbb{A}$ dans la base $\mathbb{B} = (e_2, \dots, e_{n+1})$, cet endomorphisme n'est pas une homothétie et est de trace nulle donc, par HR, il existe une base $\tilde{\mathcal{B}}' = (e'_2, \dots, e'_{n+1})$ dans laquelle la matrice $\mathbb{A}'$ de $\tilde{T}$ n'a que des zéros sur la diagonale. Posons $\mathbb{B}' = (e_1, e'_2, \dots, e'_{n+1})$, c'est une base de X . Montrons que la matrice de T dans cette base n'a que des 0 sur la diagonale. Par la matrice précédente, $T(e_1) \in \tilde{X}$ ce qui justifie que dans $\mathbb{T}_{B'}$ on ait un 0 en ligne 1 colonne 1. Si $x \in \tilde{X}$, $T(x) = \alpha_x e_1 + \tilde{T}(x)$; aussi, la composante de $T(e'_i)$ sur e'_i est la même que celle de $\tilde{T}(e'_i)$; elle est donc nulle. Tous les termes diagonaux de $\mathbb{T}_{B'}$ sont donc nuls. Ce qui termine l'hérédité et la récurrence.

Il existe donc une base dans laquelle la matrice de T n'a que des 0 sur sa diagonale.

14. D'après le premier point de la démonstration précédente, comme T n'est pas une homothétie, il existe une base (e_1, e_2) de X relativement à laquelle la matrice de T s'écrit $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & t_1 + t_2 \end{pmatrix}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose alors $f_1 = e_1$ et $f_2 = -t_1 e_1 + e_2$. f_2 n'est pas colinéaire à f_1 , donc (f_1, f_2) est une famille libre donc une base de X . Mais $T(e_1) = e_2$, donc $T(f_1) = e_2 = f_2 + t_1 e_1 = f_2 + t_1 f_1$. La matrice de T relativement à (f_1, f_2) s'écrit donc $\begin{pmatrix} t_1 & \delta_1 \\ 1 & \delta_2 \end{pmatrix}$, où δ_1 et δ_2 sont réels. Mais la trace de cette matrice est $t_1 + t_2$, donc $\delta_2 = t_2$, donc les coefficients diagonaux de la matrice de T relativement à la base (f_1, f_2) sont t_1 et t_2 .

Remarque : C'est une méthode "à la main", on peut aussi introduire $T' = T - t_1 I$ et appliquer à T' le résultat précédent (de 12).

15. Par la propriété admise (pour $t = t_1$), il existe un projecteur L de X de rang 1, tel que d'une part $LTL = t_1 L$ et d'autre part $L'TL'$ ne soit pas proportionnel à $L' = I - L$. Par la question 9, dans une base $\mathcal{C}$ adaptée à

la décomposition $E = R(L) \oplus N(L) : \mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|ccc} t_1 & x & \cdots & x \\ \hline x & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ x & & & \end{array} \right)$ et par la question 10 comme $L'TL'$ n'est pas proportionnel à I , $\mathbb{B}$ n'est pas une matrice colinéaire à I .

16. La récurrence est suggérée et a été initialisée pour $n = 2$ en question 14. Supposons la propriété réalisée à l'ordre $n - 1 \geq 2$ et démontrons la à l'ordre n . Par la question précédente, il existe $\mathcal{C} = \{e_1, \dots, e_n\}$ telle

que : $\mathbb{T}_{\mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|ccc} t_1 & x & \cdots & x \\ \hline x & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ x & & & \end{array} \right)$ où $\mathbb{B}$ n'est pas une matrice d'homothétie et $\text{tr}(\mathbb{B}) = \text{tr}(T) - t_1 = \sum_{i=2}^n t_i$.

Soit T_1 l'endomorphisme de $\text{Vect } e_2, \dots, e_n$ de matrice $\mathbb{B}$ dans la base $\mathcal{C}_1 = \{e_2, \dots, e_n\}$. T_1 n'est donc pas une homothétie et par hypothèse de récurrence, il existe $\mathcal{C}''$ telle que $\mathbb{T}_{1, \mathcal{C}''} = \mathbb{B}'$ est une matrice de termes

diagonaux $t_2, \dots, t_n$. Soit $\mathcal{B}'' = \{e_1\} \cup \mathcal{C}''$. La matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}''$ est $\mathbb{Q} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{Q}_1 \end{array} \right)$ où $\mathbb{Q}_1$ est

la matrice de passage de $\mathcal{C}_1$ à $\mathcal{C}''$ et $\mathbb{Q}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & \mathbb{Q}_1^{-1} \end{array} \right)$. Un calcul en blocs donne alors :

$$\mathbb{T}_{\mathcal{B}''} = \mathbb{Q}^{-1} \left(\begin{array}{c|ccc} t_1 & x & \cdots & x \\ \hline x & & & \\ \vdots & & \mathbb{B} & \\ x & & & \end{array} \right) \mathbb{Q} = \left(\begin{array}{c|ccc} t_1 & x & \cdots & x \\ \hline x & & & \\ \vdots & & \mathbb{B}' & \\ x & & & \end{array} \right)$$

Cette dernière matrice a bien comme éléments diagonaux $t_1, \dots, t_n$. Ainsi on a vérifié par récurrence que : Il existe une base $\mathcal{B}''$ dans laquelle la diagonale de $\mathbb{T}_{\mathcal{B}''}$ ait pour éléments diagonaux les t_i où $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

4 Décomposition en somme de projecteurs

Correction :

17. Par le théorème du rang, $\dim N(T) = n - \rho$. Soit X_1 un supplémentaire de $N(T)$ et $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une base adaptée à la décomposition $X = F \oplus N(T)$. Dans cette base $\mathcal{B}$, $\mathbb{T}_{\mathcal{B}}$ est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} \mathbb{T}_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{T}_2 & \mathbb{O} \end{array} \right)$.

18. Soit T_1 l'endomorphisme de X_1 de matrice $\mathbb{T}_1$ dans la base $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \dots, e_\rho\}$. Comme $\text{tr}(T) = \text{tr}(\mathbb{T}_{\mathcal{B}}) = \text{tr}(\mathbb{T}_1) = \text{tr}(T_1)$, $\text{tr}(T_1)$ est élément de $\mathbb{N}$ et $\text{tr}(T_1) \geq \rho$. Soient $t_i = 1$ pour $i \in \llbracket 1, \rho - 1 \rrbracket$ et $t_\rho = \text{tr}(T) - (\rho - 1) \geq 1$. Ces ρ nombres sont des entiers naturels non nuls dont la trace est égale à $\text{tr}(T_1)$. Par la question 16, T' n'étant pas une homothétie, il existe $\mathcal{B}'_1$ une base de X_1 où $\mathbb{T}'_1$ la matrice de T' dans la base $\mathcal{B}'_1$ admet comme éléments diagonaux $t_1, \dots, t_\rho$. Soit $\mathcal{B}' = \mathcal{B}'_1 \cup \{e_{\rho+1}, \dots, e_n\}$. Dans cette nouvelle base, la matrice de T a la forme $\left(\begin{array}{cc} \mathbb{T}'_1 & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{T}'_2 & \mathbb{O} \end{array} \right)$ où $\mathbb{T}'_1$ a comme éléments diagonaux des entiers non nuls.

19. Soient $C_1, \dots, C_\rho$ les premières colonnes de $\mathbb{T}_{\mathcal{B}'}$. Soit P_i l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$(\mathbb{P}_i)_{\mathcal{B}'} = \left(\begin{array}{cccccc} 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{t_i} C_i & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right)$$

Cette matrice ayant un 1 en place (i, i) , on a $\mathbb{P}_i^2 = \mathbb{P}_i$, ce qui prouve que les P_i sont des projecteurs. Ainsi

$$T = \sum_{i=1}^{\rho} t_i P_i = \underbrace{P_1 + \cdots + P_1}_{t_1 \text{ fois}} + \cdots + \underbrace{P_{\rho} + \cdots + P_{\rho}}_{t_{\rho} \text{ fois}}.$$

20. Comme $\mathbb{T}_1 = \alpha \mathbb{I}_{\rho}$, $\text{tr}(T) \geq \rho$ donne $\alpha \geq 1$.

Si $\alpha = 1$, on peut utiliser la méthode précédente (on peut même l'utiliser si $\alpha \in \mathbb{N}$) en décomposant en somme de ρ projecteurs de rang 1.

Si $\alpha > 1$, soit P_0 de matrice $\mathbb{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{O} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$. Alors $T - P_0$ a pour matrice : $(T - P_0)_{\mathcal{B}'} =$

$\begin{pmatrix} \mathbb{T}_1'' & 0 \\ \mathbb{T}_2' & 0 \end{pmatrix}$ où T_1'' est une matrice ayant pour éléments diagonaux $(\alpha - 1, \alpha, \dots, \alpha)$: ce n'est donc pas une matrice d'homothétie. De plus, $T - P_0$ est de rang au plus ρ (sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$ a $n - \rho$ colonnes nulles). Ainsi $T - P_0$ vérifie

$$\text{tr}(T - P_0) = \rho\alpha - 1 > \rho - 1 \implies \text{tr}(T - P_0) \geq \rho \geq \text{rg}(T - P_0)$$

donc on peut appliquer la question précédente. $T' = T - P_0$ est une somme de projecteurs et comme $T = P_0 + (T - P_0)$: T est une somme de projecteurs. On a ainsi prouvé que T est une somme de projecteurs ssi sa trace est un entier naturel supérieur ou égal à son rang.