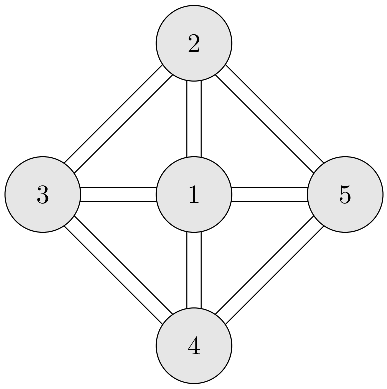
DNS 5 : pour le vendredi 13 décembre

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 *(MINES 2017 PC-PSI)*.
Un labyrinthe est constitué de cinq salles, numérotées de 1 à 5, qui communiquent par des tubes selon le schéma ci-dessous



Un rat se déplace dans ce labyrinthe, et on relève sa position en des instants numérotés $0, 1, 2, \ldots, k, \ldots$ $(k \in \mathbb{N})$. On admet que, si le rat se trouve à l'instant k $(k \in \mathbb{N})$ dans la salle numéro i $(1 \leq i \leq 5)$, alors il empruntera aléatoirement l'un des tubes de la salle i et se trouvera donc, à l'instant $k+1$, avec équiprobabilité, dans l'une quelconque des salles communiquant avec la salle i. On admet que l'on peut introduire, pour tout k entier naturel, une variable aléatoire S_k donnant le numéro de la salle où se trouve le rat à l'instant k. A titre d'exemple, on aura donc

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(S_{k+1} = 1 | S_k = 2) = \mathbb{P}(S_{k+1} = 3 | S_k = 2) = \mathbb{P}(S_{k+1} = 5 | S_k = 2) = \frac{1}{3}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on introduit la matrice colonne

$$X_k = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(S_k = 1) \\ \mathbb{P}(S_k = 2) \\ \mathbb{P}(S_k = 3) \\ \mathbb{P}(S_k = 4) \\ \mathbb{P}(S_k = 5) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$$

Pour une matrice B, ${}^tB$ représente sa matrice transposée.

I] Premiers pas

1° En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $\mathbb{P}(S_{k+1} = 1)$ s'écrit comme combinaison linéaire des $\mathbb{P}(S_k = i)$ pour $i = 1, \ldots, 5$.

2° Expliciter la matrice carrée $B \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ telle que $X_{k+1} = BX_k$ pour tout entier naturel k.

3° En observant les colonnes de la matrice B, montrer que le réel 1 est valeur propre de ${}^tB$ et expliciter un vecteur propre associé.

On suppose que la loi de la variable S_0 est donnée par

$$X_0 = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \\ 3/16 \end{pmatrix} \tag{1}$$

4° Montrer qu'alors les variables alétoires S_k ont toutes la même loi.

5° Est-ce que S_0 et S_1 sont indépendantes ?

II] Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme $\|.\|$ sur E telle que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\| \leq \|x\|$$

Pour tout entier naturel k non nul, on considère l'endomorphisme

$$r_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} u^l = \frac{1}{k}(I_E + u + u^2 + \cdots + u^{k-1})$$

où I_E représente l'endomorphisme identité de E.

6° Soit $x \in \ker(u - I_E)$. Déterminer $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x)$.

7° Soit $x \in \mathrm{Im}(u - I_E)$. Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x) = 0_E$.

8° En déduire que $E = \ker(u - I_E) \oplus \mathrm{Im}(u - I_E)$.

9° Soit x un vecteur quelconque. Montrer que la suite $(r_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un vecteur de E, que l'on notera $p(x)$. Interpréter géométriquement l'application $p\ :\ E \to E$ ainsi définie.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On suppose qu'il existe une norme, aussi notée $\|\cdot\|$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ identifié à $\mathbb{R}^n$, telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on ait $\|AX\| \leq \|X\|$. Pour tout k entier naturel non nul, on considère la matrice

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l = \frac{1}{k}(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}) \tag{2}$$

où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

10° Montrer que la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P, telle que $P^2 = P$.

III] Matrices stochastiques

On fixe dans cette partie un entier $n \geq 2$.

Définition 1 *On notera $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne dont tous les coefficients valent* 1.

Définition 2 *Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite* **stochastique** *si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\forall (i,j) \in [|1,n|]^2,\ a_{i,j} \geq 0 \tag{3}$$

$$\forall i \in [|1,n|],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1 \tag{4}$$

Nous dirons aussi qu'une matrice ligne $L = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients λ_i sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à 1.

11° Vérifier que la condition (4) équivaut à la condition $AU = U$.

12° En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices stochastiques (carrées d'ordre n) est stable pour le produit matriciel.

13° Montrer que cet ensemble $\mathcal{E}$ est une partie fermée et convexe de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On munit l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$ définie par $\|X\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$ où les x_i sont les coefficients de X.

14° Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique, alors on a $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Dans les question 15 à 22, on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique, et on suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que A^p ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout k entier naturel non nul, on posera

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l$$

15° Montrer que $\ker(A^p - I_n)$ est de dimension 1.
Indication : soit $X = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \ker(A^p - I_n)$, soit $s \in [|1,n|]$ un indice tel que $x_s = \max_{1\leq j\leq n} x_j$, on montrera que $x_j = x_s$ pour tout j.

16° En déduire que $\ker(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$.

17° Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la matrice R_k est stochastique.

18° Montrer que la suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vers une matrice P, stochastique de rang 1.

19° En déduire que l'on peut écrire $P = UL$, où $L = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est une matrice ligne stochastique.

20° Montrer que $PA = P$. En déduire que L est la seule matrice ligne stochastique vérifiant $LA = L$.

21° Montrer que les coefficients de la matrice ligne L sont tous strictement positifs.

22° Montrer que le réel 1 est valeur propre simple de A. *On pourra utiliser la question 8.*

IV] Application au labyrinthe

On approfondit l'étude commencée dans la partie **1** en exploitant les résultats de la partie **3**.

On pose $A = {}^tB$ où B est la matrice construite dans la partie **1**.

Un calcul qui n'est pas demandé montre que les coefficients de la matrice A^2 sont tous strictement positifs.

23° Expliciter la limite P de la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie en (2).

24° Montrer qu'il existe une unique loi de probabilité sur l'ensemble $[|1, 5|]$ telle que, si la variable aléatoire S_0 suit cette loi, alors les variables S_k suivent toutes la même loi (autrement dit, telle la présence du rat dans une salle soit la même à tous les instants).