DNS 5 : pour le vendredi 13 décembre

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1 *(MINES 2017 PC-PSI)*.

I] Premiers pas

Correction :

1° Comme $((S_k = i))_{1\le i\le 5}$ est un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne $\mathbb{P}(S_{k+1}=1) = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}_{(S_k=i)}(S_{k+1}=1)\mathbb{P}(S_k=i)$, de plus on a $\mathbb{P}_{S_k=1}(S_{k+1}=1)=0$ et $\mathbb{P}_{(S_k=i)}(S_{k+1}=1)=1/4$ pour $2\le i\le 5$, ainsi : $\mathbb{P}(S_{k+1}=1) = \dfrac{1}{4}\sum_{i=2}^{5}\mathbb{P}(S_k=i)$.

2° On introduit la matrice B dont le terme courant vaut $b_{i,j} = \mathbb{P}_{(S_k=j)}(S_{k+1}=i)$. Ces coefficients sont indépendants de k et issus de l'énoncé. De plus on remarque que le i-ème vecteur colonne C_i de BX_k vaut $C_i = \sum_{j=1}^{5} b_{i,j}\mathbb{P}(S_k=j) = \sum_{j=1}^{5}\mathbb{P}_{(S_k=j)}(S_{k+1}=i)\mathbb{P}(S_k=j) = \mathbb{P}(S_{k+1}=i$ (la dernière égalité est la FPT). On a bien $X_{k+1} = BX_k$ pour tout $k\in\mathbb{N}$, où la matrice B est donnée par :

$$B = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

3° La somme des éléments d'une colonne de B vaut toujours 1, ainsi le vecteur colonne $U\in\mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$ qui n'a que des 1 en coefficients est vecteur propre de valeur propre 1 de ${}^tB$.

4° On remarque (calcul direct) que donne $BX_0 = X_0$, on en déduit donc par récurrence immédiate que $X_k = X_0$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Or la loi de S_k est complètement caractérisée par X_k on en déduit donc que tous les S_k suivent la même loi (celle de S_0).

5° Comme $0 = \mathbb{P}(S_0=1, S_1=1) \ne \mathbb{P}(S_0=1)\mathbb{P}(S_1=1) = 1/16$ les variables aléatoires S_0 et S_1 ne sont pas indépendantes.

II] Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Correction :

6° Par définition de x on a $u(x)=x$, ainsi par récurrence immédiate $u^l(x)=x$ pour tout $l\in\mathbb{N}$. On en déduit donc que $r_k(x)=x$ pour tout k, cette suite constance converge bien vers x quand $k\to\infty$.

7° Par définition de x, il existe $y\in E$ tel que $x = u(y)-y$. On en déduit donc, pour tout l, que $u^l(x) = u^{l+1}(y) - u^l(y)$. Ainsi (somme télescopique) on a $r_k(x) = \frac{1}{k}(u^k(y)-y)$. Par choix de la norme (et par récurrence immédiate) on a, pour tout $k\in\mathbb{N}$, que $\|u^k(y)\|\le\|y\|$, ainsi l'inégalité triangulaire donne : $\|r_k(x)\| \le \dfrac{2}{k}\|y\| \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Dit autrement : $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x) = 0_E$.

8° Soit $x \in \ker(u - I_E) \cap \mathrm{Im}(u - I_E)$, la suite $r_k(x)$ converge vers x (d'après 6°) et vers 0 (d'après 7°), ainsi par unicité de la limite $x = 0_E$. On a donc montré que $\ker(u - I_E) \cap \mathrm{Im}(u - I_E) = \{0_E\}$.
De plus le théorème du rang nous permet d'avoir que $\dim(\ker(u - I_E)) + \dim(\mathrm{Im}(u - I_E)) = \dim(E)$.
Il en résulte que ces deux sev sont supplémentaires dans E, ie que $E = \ker(u - I_E) \oplus \mathrm{Im}(u - I_E)$.

9° Comme $E = \ker(u - I_E) \oplus \mathrm{Im}(u - I_E)$, le vecteur x se décompose de façon unique comme $x = y + z$ où $y \in \mathrm{Im}(u-I_E)$ et $z \in \ker(u-I_E)$. De plus on a $r_k(x) = r_k(y)+r_k(z)$ Ainsi $\lim\limits_{k\to+\infty} r_k(x) = y+0 = y$ (d'après 6° et 7°). D'où $p(x) = y$. On en déduit donc que p n'est rien d'autre que la projection sur $\ker(u-I_E)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u - I_E)$.

10° C'est juste la traduction matricielle de ce qui précède, cela passe bien à la limite car l'application $f \to \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est continue car linéaire. On utilise juste en plus que $P^2 = P$ (on sait que p est un projecteur ssi $p \circ p = p$).

III] Matrices stochastiques

Correction :

11° On a : $AU = U \iff \forall i \in [\![1, n]\!], \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}u_j = u_i \iff (4)$.

12° Soit A et B deux matrices stochastiques. La matrice $C = AB$ vérifie la condition (3) d'après la définition du produit matriciel. De plus on a $CU = ABU = AU = U$, ainsi elle vérifie aussi la condition (4).

13° Soit (A_n) une suite de matrice stochastiques qui converge vers A, l'application $B \to BU$ est linéaire donc continue, ainsi A_nU converge vers AU quand n tend vers $+\infty$. Or pour tout n, on a $A_nU = U$. Ainsi (par unicité de la limite) $AU = U$ et A est stochastique (la positivité est évidente). On en déduit que $\mathcal{E}$ est fermé.
Soit A et B deux matrices stochastiques, soit $t \in [0, 1]$, on a $(tA+(1-t)A)U = tAU+(1-t)AU = tU+(1-t)U = U$, ainsi $tA + (1 - t)A$ est stochastique (la positivité des coefficients est évident). On a donc montré que $\mathcal{E}$ est convexe.

14° Soit $A \in \mathcal{E}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Notons $(x_1, \dots, x_n)$ les coefficients de X et posons $Y = AX = (y_i)$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$ on a $y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\|X\|_\infty = \|X\|_\infty$ (car $x_j \leq \|X\|_\infty$ pour tout j). En prenant le max on a $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$.

15° On a (récurrence immédiate avec la question 12°) : A^p stochastique, ainsi $A^pU = U$, d'où $\mathrm{Vect}(U) \subset \ker(A^p - I_n)$.
Montrons l'inclusion dans l'autre sens, soit $X = (x_i)_{1\leq i\leq n} \in \ker(A^p - I_n)$, soit $s \in [\![1, n]\!]$ un indice tel que $x_s = \|X\|_\infty$. On pose $B = A^p$ et on note $b_{i,j}$ son terme courant. Par définition de X on a $BX = X$ ainsi (en prenant la s-ème ligne) : $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{s,j}x_j = x_s$, en utilisant x_s est maximum (et que $b_{s,j} \geq 0$ pour tout j) on en déduit que $x_s = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{s,j}x_j \leq \underbrace{\sum_{j=1}^{n} b_{s,j}}_{=1} x_s = x_s$. Ainsi l'inégalité du milieu est une égalité. Si un des x_j était différent de x_s on aurait $b_{s,j}x_j < b_{s,j}x_s$ puisque $b_{s,j} \neq 0$ et donc que $x_s < x_s$, ce qui est absurde. Ainsi tous les x_j sont égaux à x_s, ie $X = x_sU$, ce qui montre que $X \in \mathrm{Vect}(U)$.
On a bien montré que :$\ker(A^p - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$, qui est donc bien de dimension 1.

16° On a (même argument qu'a la question précédente) : $\mathrm{Vect}(U) \subset \ker(A^p - I_n)$. Soit $X \in \ker(A - I_n)$, ainsi $AX = X$ et donc (récurrence immédiate) que $A^pX = X$, d'où $X \in \ker(A^p - I_n)$, on a donc, d'après la question précédente, que $X \in \mathrm{Vect}(U)$, ce qui termine de montrer que $\ker(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$

17° Soit $k \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout l, A^l est stochastique (question 12°). Ainsi $R_kU = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{l=0}^{k-1} A^lU = \dfrac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} U = \dfrac{k}{k}U = U$, comme de plus R_k est à coefficients positifs on a R_k stochastique.

18° On peut utiliser la question 10° (en prenant la norme infinie, cf. question 14°), ainsi R_k converge vers une matrice P qui est stochastique (puisque $\mathcal{E}$ est fermé), de plus P est la projection sur $\ker(A - I_n)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(A - I_n)$, comme $\ker(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$, P est de rang 1.

19° Notons L la première ligne de P, L n'est pas nulle puisque P est stochastique, en effet les coefficients de L sont positifs et la somme de ces coefficients vaut 1. De même aucune ligne de P ne peut être nulle pour la même raison. Comme P est de rang 1 toutes ses lignes sont colinéaires (car le rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée), ainsi toutes les lignes de P sont de la forme λL où $\lambda \in \mathbb{R}^\star$, comme la somme des coefficients d'une même ligne vaut 1 on a $\lambda = 1$, ainsi toutes les lignes de P valent L. On a donc montré $P = UL$.

20° Comme P est la projection sur $\ker(A - I_n)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(A - I_n)$, on a que $\ker(P) = \mathrm{Im}(A - I_n)$. Ainsi pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a : $(PA - P)X = P(A - I_n)X = 0$. Ainsi $PA - P = 0$, ie $PA = P$.

Alternative : Utiliser que (R_k) converge vers P. On a que (R_kA) converge vers PA. Or $R_kA = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{l=0}^{k-1} A^{l+1} = \dfrac{1}{k}((k+1)R_{k+1} - I_n) = \dfrac{k+1}{k}R_{k+1} - \dfrac{1}{k}I_n \underset{k\to+\infty}{P}$, l'unicité de la limite permet de conclure.

On a $PA = P$ donc $ULA = UL$ (d'après la question précédente), il ne suffit plus qu'a multiplier à gauche par ${}^tU$ et de remarquer que ${}^tUU = n \neq 0$ pour conclure que $LA = L$. Soit maintenant L' un vecteur ligne tel que $L'A = L'$ (et donc par récurrence immédiate $L'A^l = L'$ pour tout l), ainsi pour tout k on a $L'R_k = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{l=0}^{k-1} L'A^l = \dfrac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} L' = L'$, en faisant tendre k vers $+\infty$ on a $L'P = L'$, ie $L'UL = L'$, or $L'U = 1$ (car L' stochastique), ainsi $L = L'$. On a bien montré que L est l'unique matrice ligne stochastique vérifiant $LA = L$.

21° Par récurrence immédiate $LA^p = L$, tous les coefficients (notés $b_{i,j}$) de A^p sont strictement positifs. Supposons qu'un des coefficients de L est nul (notons $(l_1, \ldots, l_n)$ les coefficients de L), disons l_j, ainsi $\sum_{k=1}^n l_k b_{k,j} = l_j = 0$, comme les $b_{k,j}$ sont strictement positifs et que les l_k sont positifs on en déduit que tous les l_k sont nuls, ce qui est absurde (contredit que L est stochastique, plus précisément (4)). Ainsi les coefficients de L sont strictement positifs.

22° La question 16° dit que 1 est valeur propre et que l'espace propre associé est de dimension 1. Reste à montrer que c'est une valeur propre simple. Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à A (ainsi $\chi_A = \chi_u$), on a de plus, d'après la question 8°, que $\ker(u - I_E) \oplus \mathrm{Im}(u - I_E) = E$, ces deux sev supplémentaires sont stables par u, notons les respectivement F et G. Notons u_F et u_G les endomorphismes induits. On a $\chi_u = \chi_{u_F}\chi_{u_G}$. Or $\chi_{u_F} = X - 1$ (F est le sous-espace propre de valeur propre 1 de u et il est de dimension 1). De plus 1 n'est pas valeur propre de u_G (cela contredirait $F \cap G = \{0\}$). Ainsi 1 est racine simple de χ_u, ie 1 est valeur propre simple de A.

IV] Application au labyrinthe

Correction :

23° Tout d'abord on remarque que tous les coefficients de A^2 sont strictement positifs, on est donc dans le cadre de la partie précédente. De plus le vecteur colonne X_0 de la question 4° est tel que $BX_0 = X_0$, ainsi le vecteur $L = {}^tX_0$ est l'unique vecteur ligne stochastique de la question 20° vérifiant $LA = L$. Ainsi, en utilisant la question 19° on a $P = UL$, ie : $P = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

24° L'existence a été démontrée dans la question 4°. L'unicité découle de la question précédente, plus précisément du fait que ${}^tX_0$ est l'unique vecteur ligne stochastique vérifiant ${}^tX_0A = {}^tX_0$.