DS 5 : vendredi 20 décembre

4h sans calculatrice

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats, il numérotera aussi ses pages.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 *(proche du cours et/ou des TDs).*

1° Donner dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (en justifiant) une matrice non diagonalisable mais trigonalisable.
Donner une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas trigonalisable.

2° Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En déduire la valeur de A^n pour $n \in \mathbb{N}$. On donnera explicitement tous les coefficients de A^n.

3° Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer χ_f et en déduire le spectre de f.

(b) Déterminer les deux sous-espaces propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
On notera u un vecteur propre de valeur propre 1 et w un vecteur propre de valeur propre 2.

(c) Déterminer un vecteur v tel que $f(v) = v + u$.

(d) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice T de f dans cette base.

4° On considère, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, le polynôme $P_n = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[(1 + \mathrm{i}X)^n - (1 - \mathrm{i}X)^n\right]$. Montrer que P_n est à coefficients réels et déterminer son degré.

5° Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(P')^2 = 4P$.

Exercice 2 *(exercice 2,* E3A PC*, Maths 1,* 2019*).*
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^{2n})$ et a un réel.
On considère l'application Φ_a définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad \Phi_a(P) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right) P' + aXP.$$

1° Déterminer toutes les valeurs du réel a pour lesquelles Φ_a est un endomorphisme de E.
Désormais a est choisi de sorte que Φ_a est un endomorphisme de E.

2° Soit $\lambda \in [\![-n, n]\!]$.
Déterminer α et β dans $\mathbb{N}$ de sorte que le polynôme $P = \left(X + \frac{1}{2}\right)^\alpha \left(X - \frac{1}{2}\right)^\beta$ vérifie $\Phi_a(P) = \lambda P$.

3° Déterminer alors les éléments propres de l'endomorphisme Φ_a.
On donnera pour chaque sous-espace propre une famille de polynômes constituant une base de ce sous-espace.

4° Déterminer une matrice B dont le spectre est $[\![0, 2n]\!]$ et dont les coefficients diagonaux sont tous égaux.

5° Expliquer comment construire à l'aide de Φ_a un endomorphisme Ψ de E admettant $0, 1, 4, 8, \dots, 4n^2$ comme valeurs propres.

Exercice 3 *Endomorphisme cyclique (*CCINP PC 2023 *Ex 1).*

Présentation générale

Dans cet exercice, nous allons étudier la notion d'endomorphisme cyclique dont la définition est donnée ci-dessous. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$. On rappelle que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^\star$, on note :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E, \quad f^1 = f, \quad f^2 = f \circ f, \quad f^p = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}.$$

On dit que l'endomorphisme f est cyclique s'il existe un vecteur $v \in E$ tel que la famille $\left(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)\right)$ soit une base de l'espace vectoriel E.

Cet exercice est composé de quatre parties indépendantes. Les trois premières sont consacrées à l'étude de différents exemples. Dans la dernière partie, on détermine une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique.

Partie I - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ défini par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (4x - 2y, x + y)$$

1° En considérant $v = (1,0) \in \mathbb{R}^2$, montrer que f est un endomorphisme cyclique de $\mathbb{R}^2$.

2° Déterminer les valeurs propres de f et donner une base de chaque sous-espace propre de f.

3° Existe-t-il un vecteur $w \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que la famille $(w, f(w))$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$?

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

4° Montrer que l'on a la relation $g^2 = g + 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

5° Montrer que la matrice M est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

6° L'endomorphisme g est-il cyclique ?

Partie III - Étude d'un troisième exemple

Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et on considère l'application Δ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

Par exemple, on a $\Delta\left(X^2\right) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$.

7° Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

8° Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Calculer $\Delta\left(X^k\right)$ sous une forme développée.

9° En déduire que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme non constant, alors $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.

10° Montrer que l'endomorphisme Δ est cyclique.

Partie IV - Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Dans cette partie, on considère un endomorphisme diagonalisable h d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$. On souhaite déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de h pour que cet endomorphisme soit cyclique.

Comme l'endomorphisme h est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ de l'espace vectoriel E composée de vecteurs propres de h. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note $\lambda_k \in \mathbb{C}$ la valeur propre associée au vecteur propre v_k.

Soit $v \in E$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de E, il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

11° Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p v_n$$

12° Montrer que le déterminant de la famille $\mathcal{F} = \left(v, h(v), \ldots, h^{n-1}(v)\right)$ dans la base $\mathcal{B}$ est égal à :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

13° Conclure que h est cyclique si et seulement si il admet n valeurs propres distinctes.

Exercice 4 *(exercice 2,* E3A PC*, Maths 1,* 2017*)***.**
On rappelle que $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ où $(p,q \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à p lignes et q colonnes. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ et l'on identifiera $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

1° Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0 V_0^\top$.

(a) Calculer A_0. Quel est le rang de A_0 ?

(b) Justifier que 0 est valeur propre de A_0 puis déterminer une base du sous-espace propre associé.

(c) (i) Calculer A_0U_0.

(ii) Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

(iii) Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

2° Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

(a) On désigne par $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne égale à la première colonne non nulle de la matrice A.

Démontrer qu'il existe une matrice ligne non nulle $L = \begin{pmatrix} l_1 & \cdots & l_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $A = CL$.

(b) Vérifier que $LC = \operatorname{tr}(A)$ puis montrer que $A^2 = \operatorname{tr}(A)A$ où $\operatorname{tr}(A)$ désigne la trace de A.

(c) Soit λ une valeur propre de la matrice A et X un vecteur propre associé.
Montrer que $\left(\lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda\right) X = 0$ et en déduire que le spectre de A est inclus dans $\{0,\ \operatorname{tr}(A)\}$.

(d) Le réel 0 est-il valeur propre de A ? Quelle est la dimension de l'espace propre associé ?

(e) Vérifier que $\operatorname{tr}(A)$ est valeur propre de A.

(f) Montrer que : A est diagonalisable $\iff$ $\operatorname{tr}(A) \neq 0$.

3° Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{rg}(f) = 1$ et $f \circ f \neq \widetilde{0}$ où $\widetilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul.
On désigne par u un vecteur de E tel que $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}(u)$.

(a) Montrer que $f(u) \neq 0$.

(b) En déduire que l'endomorphisme f possède une valeur propre réelle non nulle.

(c) Montrer alors que f est un endomorphisme diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5 *(sur les matrices compagnon : d'après* CCP MP 2001 *Maths 2)***.**
Dans cet exercice $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un entier naturel, et χ_A le polynôme caractéristique de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On considère le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ de $\mathbb{K}_n[X]$ et C_P sa matrice compagnon associée, c'est-à dire la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & . & . & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 & -a_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & . & . & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(ie la matrice $C_P = (c_{i,j})$ est définie par $c_{i,j} = 1$ pour $i - j = 1$, $c_{i,n} = -a_{i-1}$ et $c_{i,j} = 0$ dans les autres cas).

1° Montrer que C_P est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$.

2° Calculer le polynôme caractéristique de la matrice C_P et déterminer une constante k telle que $\chi_{C_p} = kP$.

3° Soit Q un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\chi_A = Q$.

4° On note $C_P^\top$ la transposée de la matrice C_P.

a) Justifier la proposition : $\operatorname{Sp}(C_P) = \operatorname{Sp}(C_P^\top)$.

b) Soit λ élément de $\operatorname{Sp}(C_P^\top)$, déterminer (ie. l'écrire avec un Vect) le sous-espace propre de $C_P^\top$ associé à λ.

c) Montrer que $C_P^\top$ est diagonalisable si et seulement si P est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.

d) On suppose que P admet n racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distinctes, montrer que $C_P^\top$ est diagonalisable et en déduire que le déterminant de VANDERMONDE $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & . & . & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & . & . & \lambda_n^2 \\ . & . & . & . & . \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & . & . & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est non nul.

e) (rajout) Question de cours : Donner (sans démonstration) l'expression factorisée du déterminant de VANDERMONDE.