DS $5^\star$: vendredi 20 décembre

4h sans calculatrice

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats, il numérotera aussi ses pages.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 *(proche du cours et/ou des TDs).*

1° Donner dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (en justifiant) une matrice non diagonalisable mais trigonalisable.
Donner une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas trigonalisable.

2° Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En déduire la valeur de A^n pour $n \in \mathbb{N}$. On donnera explicitement tous les coefficients de A^n.

3° Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer χ_f et en déduire le spectre de f.

(b) Déterminer les deux sous-espaces propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
On notera u un vecteur propre de valeur propre 1 et w un vecteur propre de valeur propre 2.

(c) Déterminer un vecteur v tel que $f(v) = v + u$.

(d) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice T de f dans cette base.

4° On considère, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, le polynôme $P_n = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[(1+\mathrm{i}X)^n - (1-\mathrm{i}X)^n\right]$. Montrer que P_n est à coefficients réels et déterminer son degré.

5° Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(P')^2 = 4P$.

Exercice 2 *Autour des matrices de Toeplitz (*CENTRALE PSI 2018 *Maths 1, sans III.B et III.C).*

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un entier naturel supérieur ou égal à 2, $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. Si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a \leq b$, $[\![a, b]\!]$ désigne l'ensemble $\{a, a+1, \dots, b-1, b\}$. $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si $(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1}$, on note $T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-2}, t_{n-1})$ la matrice

$$T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & \cdots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \ddots & & \vdots \\ t_{-2} & t_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 & t_2 \\ \vdots & & \ddots & t_{-1} & t_0 & t_1 \\ t_{-n+1} & \cdots & \cdots & t_{-2} & t_{-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

Une telle matrice est appelée *matrice de Toeplitz* d'ordre n. On nomme $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de Toeplitz d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$\mathrm{Toep}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exists (t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1},\ M = T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-2}, t_{n-1})\}$$

Une matrice N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^\star$ tel que $N^p = 0$. On admettra qu'une telle matrice vérifie $N^n = 0$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique défini par $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$.

Si $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_pX^p$ ($p \in \mathbb{N}$) est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $P(M)$ désigne la matrice

$$P(M) = a_0I_n + a_1M + \cdots + a_pM^p$$

Le but de ce problème est l'étude de certaines propriétés des matrices de Toeplitz. La partie I traite de généralités sur les matrices de Toeplitz et de quelques exemples. La partie II, indépendante de la partie I, étudie un type particulier de matrices de Toeplitz — les matrices circulantes — en s'intéressant à leur structure et à leur diagonalisabilité. Enfin, la partie III, indépendante des précédentes, aborde l'étude des matrices cycliques et les relie aux matrices de Toeplitz.

I – Généralités et quelques exemples

I.A – Généralités

1° Montrer que $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En donner une base et en préciser la dimension.

2° Montrer que si deux matrices A et B commutent ($AB = BA$) et si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, alors $P(A)$ et $Q(B)$ commutent.

I.B – Cas de la dimension 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ une matrice de Toeplitz de taille 2×2, où (a, b, c) sont des complexes.

3° Donner le polynôme caractéristique de A.

4° Discuter, en fonction des valeurs de (a, b, c), de la diagonalisabilité de A.

Réduction d'une matrice sous forme de Toeplitz

5° Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que M est semblable à une matrice de type $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ou de type ou de type $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ où α, β et γ sont des complexes avec $\alpha \neq \beta$.

6° En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de Toeplitz.

I.C – Un autre cas particulier : les matrices tridiagonales

Une matrice tridiagonale est une matrice de Toeplitz de la forme $T(0, \ldots, 0, t_{-1}, t_0, t_1, 0, \ldots, 0)$, i.e. une matrice de la forme

$$A_n(a, b, c) = \begin{pmatrix} a & b & & (0) \\ c & a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{pmatrix}$$

où (a, b, c) sont des complexes.

On fixe (a, b, c) trois nombres complexes tels que $bc \neq 0$. On se propose de chercher les éléments propres de $A_n(a, b, c)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A_n(a, b, c)$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé.

7° Montrer que si l'on pose $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = 0$, alors $(x_1, \ldots, x_n)$ sont les termes de rang variant de 1 à n d'une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifiant $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 0$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad bx_{k+2} + (a - \lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$$

8° Rappeler l'expression du terme général de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en fonction des solutions de l'équation

$$bx^2 + (a - \lambda)x + c = 0 \qquad \text{(I.1)}$$

9° À l'aide des conditions imposées à x_0 et x_{n+1}, montrer que (I.1) admet deux solutions distinctes r_1 et r_2.

10° Montrer que r_1 et r_2 sont non nuls et que r_1/r_2 appartient à $\mathbb{U}_{n+1}$.

11° En utilisant l'équation (I.1) satisfaite par r_1 et r_2, déterminer r_1r_2 et $r_1 + r_2$. En déduire qu'il existe un entier $\ell \in [\![1, n]\!]$ et un nombre complexe ρ vérifiant $\rho^2 = bc$ tels que

$$\lambda = a + 2\rho \cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)$$

12° En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout k dans $[\![0, n+1]\!]$, $x_k = 2\mathrm{i}\alpha\frac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)$.

13° Conclure que $A_n(a, b, c)$ est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

II – Matrices circulantes

Une matrice *circulante* est une matrice de Toeplitz $T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-2}, t_{n-1})$, pour laquelle

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad t_k = t_{-n+k}$$

Elle est donc de la forme

$$T(t_1, t_2, \dots, t_0, t_1, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} \\ t_{n-1} & t_0 & \ddots & & t_{n-2} \\ t_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 \\ t_1 & \cdots & t_{n-2} & t_{n-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

On pose $M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et $\omega_n = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$.

14° Calculer $M_n^2, \dots, M_n^n$. Montrer que M_n est inversible et donner un polynôme annulateur de M_n.

15° Justifier que M_n est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres (exprimées à l'aide de ω_n) et donner une base de vecteurs propres de M_n.

16° On pose $\Phi_n = (\omega_n^{(p-1)(q-1)})_{1 \le p,q \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier que Φ_n est inversible et donner sans calcul la valeur de la matrice $\Phi_n^{-1} M_n \Phi_n$.

17° Soit A une matrice circulante. Donner un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P(M_n)$.

18° Réciproquement, si $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer, à l'aide d'une division euclidienne de P par un polynôme bien choisi, que $P(M_n)$ est une matrice circulante.

19° Montrer que l'ensemble des matrices circulantes est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$, stable par produit et par transposition.

20° Montrer que toute matrice circulante est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.

III – Étude des matrices cycliques

III.A – Endomorphismes et matrices cycliques

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note f_M l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M.

21° Montrer que si M est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :
(i) il existe x_0 dans $\mathbb{C}^n$ tel que $\left(x_0, f_M(x_0), \dots, f_M^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de $\mathbb{C}^n$;
(ii) M est semblable à la matrice $C(a_0, \dots, a_{n-1})$ définie par

$$C(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

où $(a_0, \dots, a_{n-1})$ sont des nombres complexes.

On dit alors que f_M est un endomorphisme cyclique, que M est une matrice cyclique et que x_0 est un vecteur cyclique de f_M.

III.A.1) Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que f_M est diagonalisable. On note $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ses valeurs propres (non nécessairement distinctes) et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs associée à ces valeurs propres. Soit $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ un vecteur de $\mathbb{C}^n$ où $(u_1, \dots, u_n)$ sont n nombres complexes.

22° Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $(u_1, \dots, u_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ pour que $\left(u, f_M(u), \dots, f_M^{n-1}(u)\right)$ soit une base de $\mathbb{C}^n$.

23° En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique. Caractériser alors ses vecteurs cycliques.

III.A.2) Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On s'intéresse aux éléments propres de la matrice $C(a_0, \dots, a_{n-1})$.

24° Soit λ un nombre complexe. En discutant dans $\mathbb{C}^n$ du système $C(a_0, \dots, a_{n-1})X = \lambda X$, montrer que λ est une valeur propre de $C(a_0, \dots, a_{n-1})$ si et seulement si λ est racine d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ à préciser.

25° Si λ est racine de ce polynôme, déterminer le sous-espace propre de $C(a_0, \dots, a_{n-1})$ associé à la valeur propre λ et préciser sa dimension.

26° En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice cyclique soit diagonalisable.

III.A.3) Commutant d'un endomorphisme cyclique

Soient M une matrice cyclique et x_0 un vecteur cyclique de f_M. On cherche à montrer que l'ensemble

$$\mathcal{C}(f_M) = \{g \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \mid f_M \circ g = g \circ f_M\}$$

est l'ensemble des polynômes en f_M.

27° Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(f_M) \in \mathcal{C}(f_M)$.

28° Soit $g \in \mathcal{C}(f_M)$. Montrer qu'il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tels que $g = \alpha_0 Id_{\mathbb{C}^n} + \alpha_1 f_M + \dots + \alpha_{n-1} f_M^{n-1}$.
Indication : On pourra utiliser la base $\big(x_0, f_M(x_0), \dots, f_M^{n-1}(x_0)\big)$ et exprimer $g(x_0)$ dans cette base.

29° Conclure.

III.A.4) Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

30° Donner les valeurs propres de N et les sous-espaces propres associés. Est-elle diagonalisable ?

31° La matrice N est-elle cyclique ?

32° Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec N est l'ensemble des matrices de Toeplitz triangulaires inférieures.