DS 5 : vendredi 20 décembre

4h sans calculatrice

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats, il numérotera aussi ses pages.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1 ***(proche du cours et/ou des TDs).***

1° Donner dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (en justifiant) une matrice non diagonalisable mais trigonalisable.
Donner une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas trigonalisable.

2° Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En déduire la valeur de A^n pour $n \in \mathbb{N}$. On donnera explicitement tous les coefficients de A^n.

3° Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer χ_f et en déduire le spectre de f.

(b) Déterminer les deux sous-espaces propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
On notera u un vecteur propre de valeur propre 1 et w un vecteur propre de valeur propre 2.

(c) Déterminer un vecteur v tel que $f(v) = v + u$.

(d) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice T de f dans cette base.

4° On considère, pour $n \in \mathbb{N}^\star$, le polynôme $P_n = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[(1 + \mathrm{i}X)^n - (1 - \mathrm{i}X)^n\right]$. Montrer que P_n est à coefficients réels et déterminer son degré.

5° Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(P')^2 = 4P$.

Correction :

1° Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a comme polynôme caractéristique X^2 qui est scindé (ainsi N est trigonalisable, bon étant donné qu'elle est triangulaire supérieure ...), elle n'est pas diagonalisable, en effet si elle l'était, il existerait $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $N = PDP^{-1}$ avec $D = 0$, ainsi on aurait $N = 0$, ce qui n'est pas le cas.
Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ a comme polynôme caractéristique $X^2 + 1$ qui n'est pas scindé, ainsi M n'est pas trigonalisable.

2° On trouve $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Comme $A^n = PD^nP^{-1}$ on trouve que : $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3 \cdot 2^n + 2 & 3 \cdot 2^n - 3 & 2^{n+1} - 2 \\ -2^{n+1} + 2 & 2^{n+2} - 3 & 2^{n+1} - 2 \\ 2^{n+1} - 2 & -3 \cdot 2^n + 3 & -2^n + 2 \end{pmatrix}$.

3° (a) On a : $\chi_f(X) = \ldots = (X-1)^2(X-2)$. Ainsi $\mathrm{Sp}(f) = \{1, 2\}$

(b) On note $u = (1, 1, 0)$ et $w = (1, 0, 1)$ et on trouve $E_1(f) = \mathrm{Vect}(u)$ et $E_2(f) = \mathrm{Vect}(w)$. Comme $\dim(E_1(f)) = 1 \neq 2 = m_1$, f n'est pas diagonalisable.

(c) On résout $f(x, y, z) - (x, y, z) = (1, 1, 0)$ et on trouve que $v = (0, 0, 1)$ convient.

(d) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, comme $\det(P) = -1$, la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$, comme $f(u) = u$, $f(v) = u + v$ et $f(w) = 2w$, on a donc $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4° Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On applique la formule du binôme :

$$P_n = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{i}^k X^k - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\mathrm{i}^k X^k\right) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\sum_{k=0}^{n}(1-(-1)^k)\binom{n}{k}\mathrm{i}^k X^k.$$

Or $1-(-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ 2 & \text{si } k \text{ impair}\end{cases}$, ainsi il ne reste que les valeurs impaires de k dans la somme, or si k est impair alors i^k est un imaginaire pur, avec le $\frac{1}{\mathrm{i}}$ devant on remarque que tous les coefficients sont réels. Ainsi $P_n \in \mathbb{R}[X]$.

On a $\deg(P_n) \leq n$, le coefficient devant X^n est $\frac{1-(-1)^n}{2\mathrm{i}}\mathrm{i}^n$, qui est non nul si n est impair, dans ce cas $\deg(P_n) = n$, si n est pair le coefficient devant X^n vaut 0 et le coefficient devant X^{n-1} vaut $\frac{1-(-1)^{n-1}}{2\mathrm{i}}n\mathrm{i}^n$ qui est non nul, ainsi $\deg(P_n) = n-1$ dans ce cas.

Ainsi $\deg(P_n) = \begin{cases} n-1 & \text{si } n \text{ pair} \\ n & \text{si } n \text{ impair}\end{cases}$.

5° Tout d'abord, si $P = c$ alors :$(P')^2 = 4P \iff P = 0$, ainsi le polynôme nul est l'unique solution constante. Si P est un polynôme non constant solution de $(P')^2 = 4P$, alors en notant $n = \deg(P)$, on a $\deg(P') = n-1$ ainsi $2n-2 = n$ ie $n = 2$. Ainsi les solutions non constante sont nécessairement de degré 2. Considérons maintenant $P = aX^2+bX+c$ un polynôme de degré 2 (ainsi $a \neq 0$). On a : $(P')^2 = 4P \iff (2aX+b)^2 = 4aX^2+4bX+4c \iff \begin{cases} 4a^2 & = 4a \\ 4ab & = 4b \\ b^2 = 4c \end{cases} \iff \begin{cases} a & = 1 \\ 0 & = 0 \\ b^2 = 4c \end{cases}$ (car $a \neq= 0$), ainsi P est solution si et seulement si $a = 1$ et $c = \frac{b^2}{4}$. En en déduit donc que les solutions sont les $P = X^2+bX+\frac{b^2}{4}$ où $b \in \mathbb{R}$ ainsi que $P = 0$.

Exercice 2 *(exercice 2,* E3A PC*, Maths 1,* 2019*)*.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$, $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^{2n})$ et a un réel.
On considère l'application Φ_a définie sur E par :

$$\forall P \in E, \quad \Phi_a(P) = \left(\frac{1}{4} - X^2\right)P' + aXP.$$

1° Déterminer toutes les valeurs du réel a pour lesquelles Φ_a est un endomorphisme de E.
Désormais a est choisi de sorte que Φ_a est un endomorphisme de E.

2° Soit $\lambda \in [\![-n, n]\!]$.
Déterminer α et β dans $\mathbb{N}$ de sorte que le polynôme $P = \left(X+\frac{1}{2}\right)^\alpha\left(X-\frac{1}{2}\right)^\beta$ vérifie $\Phi_a(P) = \lambda P$.

3° Déterminer alors les éléments propres de l'endomorphisme Φ_a.
On donnera pour chaque sous-espace propre une famille de polynômes constituant une base de ce sous-espace.

4° Déterminer une matrice B dont le spectre est $[\![0, 2n]\!]$ et dont les coefficients diagonaux sont tous égaux.

5° Expliquer comment construire à l'aide de Φ_a un endomorphisme Ψ de E admettant $0, 1, 4, 8, \ldots, 4n^2$ comme valeurs propres.

Correction :

1° Φ_a est clairement linéaire, en effet si P et Q sont deux polynômes et λ un réel alors : $\Phi_a(P+\lambda Q) = \left(\frac{1}{4}-X^2\right)(P+\lambda Q) + aX(P+\lambda Q) = \left(\frac{1}{4}-X^2\right)P' + aXP + \lambda\left(\left(\frac{1}{4}-X^2\right)Q' + aXQ\right) = \Phi_a(P) + \lambda\Phi_a(Q)$.
Cependant sans condition sur a, on a, pour $P \in E$, que $\deg(\Phi_a(P)) \leq \deg(P)+1 \leq 2n+1$.
On a $\Phi_a(X^{2n}) = \frac{2n}{4}X^{2n-1} - 2nX^{2n+1} + aX^{2n+1} = (a-2n)X^{2n+1} + \frac{2n}{4}X^{2n-1}$. Ainsi $\Phi_a(X^{2n}) \in E$ si et seulement si $a = 2n$. Ainsi $a = 2n$ est une condition nécessaire pour avoir Φ_a endomorphisme de E.
On suppose maintenant $a = 2n$, pour $P \in E$, on note a_{2n} le coefficient dominant de P, ainsi il existe Q tel que $P = a_{2n}X^{2n} + Q$ et on a $\deg(Q) \leq 2n-1$, ainsi $\Phi_a(P) = a_{2n}\left((a-2n)X^{2n+1} + \frac{2n}{4}X^{2n-1}\right) + \Phi_a(Q)$, comme $\deg(\Phi_a(Q)) \leq \deg(\Phi_a(Q)) + 1 \leq 2n$ et comme $a = 2n$ on a bien $\Phi_a(P) \in E$. Ainsi Φ_a est bien un endomorphisme de E dans le cas $a = 2n$.
On a donc montré que $\Phi_a \in \mathcal{L}(E)$ si et seulement si $a = 2n$.

2° Procédons par Analyse-Synthèse, soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$, on suppose que $P = \left(X+\frac{1}{2}\right)^\alpha\left(X-\frac{1}{2}\right)^\beta$ vérifie $\Phi_a(P) = \lambda P$.
Or, on a : $\Phi_a(P) = \left(\frac{1}{4}-X^2\right)\left(\alpha\left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\left(X-\frac{1}{2}\right)^\beta + \beta\left(X+\frac{1}{2}\right)^\alpha\left(X-\frac{1}{2}\right)^{\beta-1}\right) + 2nX\left(X+\frac{1}{2}\right)^\alpha\left(X-\frac{1}{2}\right)^\beta$.

Comme $\frac{1}{4}-X^2=-(X-\frac{1}{2})(X+\frac{1}{2})$, on trouve que $\Phi_a(P)=\left((2n-\alpha-\beta)X+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)\left(X+\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{\beta}=\left((2n-\alpha-\beta)X+\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\right)P$. Ainsi :

$$\Phi_a(P)=\lambda P \iff \begin{cases}2n-\alpha-\beta=0\\ \frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\lambda\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha+\beta=2n\\ \alpha-\beta=2\lambda\end{cases} \iff \begin{cases}\alpha=n+\lambda\\ \beta=n-\lambda\end{cases}.$$

Réciproquement, si $\alpha=n+\lambda$ et $\beta=n-\lambda$ alors on a bien $\Phi_a(P)=\lambda P$.

3° On viens de montrer que tous les $\lambda\in[\![-n,n]\!]$ sont valeurs propres de Φ_a, or $[\![-n,n]\!]$ contient $2n+1$ éléments, ainsi Φ_a est un endomorphisme de E, qui est de dimension $2n+1$ et qui possède $2n+1$ valeurs propres distinctes, on en déduit donc que $\mathrm{Sp}(\Phi_a)=[\![-n,n]\!]$ et que pour tout $\lambda\in\mathrm{Sp}(\Phi_a)$ que $\left(X+\frac{1}{2}\right)^{n+\lambda}\left(X-\frac{1}{2}\right)^{n-\lambda}$ engendre $E_\lambda(\Phi_a)$.

4° Posons $A=\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi_a)$ et $B=A+nI_{2n+1}$. D'après la question précédente, il existe $P\in\mathrm{GL}_{2n+1}(\mathbb{R})$ tel que $A=PDP^{-1}$ et où D est la matrice diagonale où les coefficients sur la diagonale sont $(-n,\dots,-1,0,1,n)$, ainsi $B=P(D+nI_{2n+1})P^{-1}$, et $D+nI_{2n+1}$ est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $(0,1,\dots,2n)$. On a bien $\mathrm{Sp}(B)=[\![0,2n]\!]$, Or pour $k\in[\![0,2n]\!]$, on a $\Phi_a(X^k)=\frac{k}{4}X^{k-1}+(2n-k)X^{k+1}$, son coefficient devant X^k est donc 0, ainsi A n'a que des 0 sur la diagonale, d'où B n'a que des n sur la diagonale, elle convient donc.

5° On remarque que $B^2=P(D+nI_{2n+1})^2P^{-1}$ et $(D+nI_{2n+1})^2$ est la matrice dont les coefficients diagonaux sont $(0,1^2,2^2,\dots,(2n)^2)$, Ainsi $(\Phi_a+n\mathrm{Id})^2$ admet $0,1,4,\dots,4n^2$ comme valeurs propres.

Exercice 3 *Endomorphisme cyclique (*CCINP PC 2023 *Ex 1)***.**
Présentation générale

Dans cet exercice, nous allons étudier la notion d'endomorphisme cyclique dont la définition est donnée ci-dessous. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n\in\mathbb{N}^\star$. On rappelle que pour tout entier $p\in\mathbb{N}^\star$, on note :

$$f^0=\mathrm{Id}_E,\quad f^1=f,\quad f^2=f\circ f,\quad f^p=\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{p\text{ fois}}.$$

On dit que l'endomorphisme f est cyclique s'il existe un vecteur $v\in E$ tel que la famille $\left(v,f(v),\dots,f^{n-1}(v)\right)$ soit une base de l'espace vectoriel E.

Cet exercice est composé de quatre parties indépendantes. Les trois premières sont consacrées à l'étude de différents exemples. Dans la dernière partie, on détermine une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique.

Partie I - Étude d'un premier exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ défini par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=(4x-2y,x+y)$$

1° En considérant $v=(1,0)\in\mathbb{R}^2$, montrer que f est un endomorphisme cyclique de $\mathbb{R}^2$.

2° Déterminer les valeurs propres de f et donner une base de chaque sous-espace propre de f.

3° Existe-t-il un vecteur $w\in\mathbb{R}^2$ non nul tel que la famille $(w,f(w))$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$?

Correction :

1° On note $v=(1,0)$ et on pose $w=f(v)=(4,1)$, la famille (v,w) est libre donc est une base de $\mathbb{R}^2$. Ainsi f est un endomorphisme cyclique de $\mathbb{R}^2$

2° On note M la matrice de f relativement à la base canonique, ainsi $M=\begin{pmatrix}4&-2\\1&1\end{pmatrix}$, on a $\chi_f(X)=\chi_M(X)=X^2-5X+6=(X-3)(X-2)$. On trouve $E_2(f)=\mathrm{Vect}((1,1))$ et $E_3(f)=\mathrm{Vect}((2,1))$. On peut noter que f est diagonalisable.

3° si on prend $w=(1,1)$, on a $f(w)=2w$, la famille $(w,2w)$ est liée, et ainsi n'est pas une base de $\mathbb{R}^2$.

Partie II - Étude d'un deuxième exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

4° Montrer que l'on a la relation $g^2 = g + 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

5° Montrer que la matrice M est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.

6° L'endomorphisme g est-il cyclique ?

Correction :

4° On a $M^2 = ... = M + 2\mathrm{I}_3$, ainsi on a bien $g^2 = g + 2\,\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

5° Notons $P(X) = X^2 - X - 2 = (X+1)(X-2)$, d'après la question précédente P est annulateur de M, comme il est scindé à racines simples, on a M diagonalisable, et on a $\mathrm{Sp}(M) \subset \{-1, 2\}$, si $\mathrm{Sp}(M)$ était un singleton, comme M est diagonalisable, alors M serait semblable à $-\mathrm{I}_3$ ou à $2\mathrm{I}_3$, ce qui n'est pas le cas, ainsi $\mathrm{Sp}(M) = \{-1, 2\}$.
Alternative : calculer χ_M.

6° Pour $v \in \mathbb{R}^3$ quelconque, on a $g^2(v) = g(v) + 2v$, ainsi $(v, g(v), g^2(v))$ n'est jamais libre donc n'est jamais une base de $\mathbb{R}^3$, ainsi g n'est pas un endomorphisme cyclique.

Partie III - Étude d'un troisième exemple

Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et on considère l'application Δ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Delta(P) = P(X+1) - P(X)$$

Par exemple, on a $\Delta\left(X^2\right) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$.

7° Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

8° Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Calculer $\Delta\left(X^k\right)$ sous une forme développée.

9° En déduire que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme non constant, alors $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.

10° Montrer que l'endomorphisme Δ est cyclique.

Correction :

7° Tout d'abord, pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a bien $\deg(\Delta(P)) \leq n$ et donc $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Reste à montrer la linéarité, soit $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\Delta(P + \lambda Q) = (P + \lambda Q)(X+1) - (P + \lambda Q)(X) = P(X+1) - P(X) + \lambda(Q(X+1) - Q(X)) = \Delta(P) + \lambda\Delta(Q)$. Ainsi Δ est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

8° On a $\Delta(1) = 0$ et, pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\Delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - X^n = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$. Ce qui montre en particulier que, si $k \geq 1$, alors $\deg(\Delta(X^k)) = k - 1$ et que son coefficient dominant est k.

9° Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non constant, notons $p = \deg(P)$ et $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_p X^p$. On a $\delta(P) = a_1\Delta(X) + \ldots + a_p\Delta(X^p)$, ce qui montre bien avec la question précédente que $\deg(\Delta(P)) = p - 1$ (de coefficient dominant pa_p).

10° Par récurrence directe sur $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\deg(\Delta^k(X^n)) = n - k$. Ainsi la famille $(X^n, \Delta(X^n), \ldots, \Delta(X^n))$ est une famille de $n+1$ polynômes non nul de degré échelonné, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$, ainsi δ est un endomorphisme cyclique.

Partie IV - Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Dans cette partie, on considère un endomorphisme diagonalisable h d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^\star$. On souhaite déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de h pour que cet endomorphisme soit cyclique.

Comme l'endomorphisme h est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ de l'espace vectoriel E composée de vecteurs propres de h. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\lambda_k \in \mathbb{C}$ la valeur propre associée au vecteur propre v_k.

Soit $v \in E$. Comme $\mathcal{B}$ est une base de E, il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

11° Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p v_n$$

12° Montrer que le déterminant de la famille $\mathcal{F} = \big(v, h(v), \dots, h^{n-1}(v)\big)$ dans la base $\mathcal{B}$ est égal à :

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

13° Conclure que h est cyclique si et seulement si il admet n valeurs propres distinctes.

Correction :

11° Montrons le par récurrence sur p.
Initialisation : Pour $p = 1$, on a $h(v) = \alpha_1 h(v_1) + \ldots + \alpha_n h(v_n) = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \alpha_n \lambda_n v_n$.
Hérédité : On suppose qu'il existe $p \ge 1$ tel que $h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p v_n$.
On a $h^{p+1}(v) = h(h^p(v)) \underset{\text{(HR)}}{=} h\left(\alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p v_n\right) = \alpha_1 \lambda_1^p h(v_1) + \cdots + \alpha_n \lambda_n^p h(v_n) = \alpha_1 \lambda_1^{p+1} v_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n^{p+1} v_n$.
Ce qui termine l'hérédité et la récurrence.

12° On a $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \lambda_1 & \ldots & \alpha_1 \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \alpha_n \lambda_n & \ldots & \alpha_n \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$. On utilise la linéarité du déterminant pour mettre $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ en facteur, et on remarque qu'on est face à un déterminant de Vandermonde, ainsi : $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{1 \le i < j \le n} (\lambda_j - \lambda_i)$.

13° Si les valeurs propres ne sont pas deux à deux distinctes alors $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = 0$ et donc $\mathcal{F}$ n'est jamais libre et donc n'est jamais une base de E.
Si les valeurs propres sont deux à deux distinctes, alors en prenant $v = v_1 + \ldots + v_n$ (ie $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 1$) on a $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0$, et donc $\mathcal{F}$ est une base de E (car $\dim(E) = n$), et ainsi h est cyclique.

Exercice 4 *(exercice 2,* E3A PC, *Maths 1,* 2017*)*.
On rappelle que $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ où $(p, q \in \mathbb{N}^\star \times \mathbb{N}^\star$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices à p lignes et q colonnes. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathcal{M}_{p,p}(\mathbb{R})$ et l'on identifiera $\mathbb{R}$ et $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

1° Soient $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $A_0 = U_0 V_0^\top$.

(a) Calculer A_0. Quel est le rang de A_0 ?
(b) Justifier que 0 est valeur propre de A_0 puis déterminer une base du sous-espace propre associé.
(c) (i) Calculer $A_0 U_0$.
(ii) Montrer que A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.
(iii) Déterminer une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et une matrice inversible P de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $A_0 = PDP^{-1}$.

2° Soit $n \ge 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

(a) On désigne par $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne égale à la première colonne non nulle de la matrice A.
Démontrer qu'il existe une matrice ligne non nulle $L = \begin{pmatrix} l_1 & \cdots & l_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $A = CL$.
(b) Vérifier que $LC = \mathrm{tr}(A)$ puis montrer que $A^2 = \mathrm{tr}(A) A$ où $\mathrm{tr}(A)$ désigne la trace de A.
(c) Soit λ une valeur propre de la matrice A et X un vecteur propre associé.
Montrer que $\left(\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda\right) X = 0$ et en déduire que le spectre de A est inclus dans $\{0,\ \mathrm{tr}(A)\}$.
(d) Le réel 0 est-il valeur propre de A ? Quelle est la dimension de l'espace propre associé ?
(e) Vérifier que $\mathrm{tr}(A)$ est valeur propre de A.
(f) Montrer que : A est diagonalisable $\iff \mathrm{tr}(A) \neq 0$.

3° Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \ge 2$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f) = 1$ et $f \circ f \neq \widetilde{0}$ où $\widetilde{0}$ désigne l'endomorphisme nul.
On désigne par u un vecteur de E tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)$.

(a) Montrer que $f(u) \neq 0$.

(b) En déduire que l'endomorphisme f possède une valeur propre réelle non nulle.

(c) Montrer alors que f est un endomorphisme diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Correction :

1° (a) On a $A_0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Toutes les colonnes de A_0 sont colinéaires à U_0, ainsi $\mathrm{rg}(A_0) = 1$.

(b) Comme $\mathrm{rg}(A_0) < 4$, A_0 n'est pas inversible, ainsi 0 est valeur propre de A_0, d'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}(A_0)) = 3$.

On a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A_0) \iff x + y - z + t = 0$, ainsi $\mathrm{Ker}(A_0) = \mathrm{Vect}(U_1, U_2, U_3)$ où on a posé $U_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) (i) On a $A_0 U_0 = -2U_0$.

(ii) Ainsi -2 est valeur propre de A_0, la famille (U_0, U_1, U_2, U_3) est donc une base (libre car les SEP sont en somme directe et on a 4 vecteurs dans un espace de dimension 4) de vecteurs propres de A_0, ainsi A_0 est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

(iii) Posons $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a P inversible et $A_0 = PDP^{-1}$.

2° (a) Comme A est une matrice de rang 1 toutes ses colonnes sont colinéaires entre elles, donc colinéaires à C, ainsi la k-ième colonne C_k de A est colinéaire à C, il existe donc l_k telle que $C_k = l_k C$. On a donc montré l'existence de $L = \begin{pmatrix} l_1 & \cdots & l_n \end{pmatrix}$ non nulle (comme l'une des colonne vaut C l'un des l_k vaut 1), on a bien $A = CL$.

(b) Pour $i \in [\![1, n]\!]$ on a $A_{i,i} = c_i l_i$, ainsi $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} c_i l_i = LC$.

On a $A^2 = (CL)(CL) = C(LC)L = \mathrm{tr}(A)CL = \mathrm{tr}(A)A$.

(c) Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et X vecteur propre de A de valeur propre λ, on a $A^2X = A(\lambda X) = \lambda^2 X$, mais on a aussi $A^2 X = \mathrm{tr}(A)AX = \lambda\,\mathrm{tr}(A)X$. Ainsi $(\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda)X = 0$, comme $X \neq 0$ (c'est un vecteur propre), on a $\lambda(\lambda - \mathrm{tr}(A)) = 0$, ainsi $\lambda \in \{0, \mathrm{tr}(A)\}$. Ce qui montre bien que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0, \mathrm{tr}(A)\}$.

(d) D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = n - 1 \geq 1$ (puisque $n \geq 2$), ainsi 0 est valeur propre de A et la dimension de l'espace propre associé est $n - 1$.

(e) Soit X un élément qui n'est pas dans le noyau de A, posons $Y = AX$, on a $Y \neq 0$ (car X n'est pas dans le noyau de A) et $AY = A^2X = \mathrm{tr}(A)AX = \mathrm{tr}(A)Y$. Ainsi Y est vecteur propre de valeur propre $\mathrm{tr}(A)$, ce qui montre bien que $\mathrm{tr}(A)$ est valeur propre de A.

(f) Si $\mathrm{tr}(A) = 0$, alors 0 est l'unique valeur propre de A, si A était diagonalisable alors il existerait P inversible telle que $A = P0_nP^{-1} = 0_n$, ce qui n'est pas le cas (la matrice nulle n'est pas de rang 1), ainsi A n'est pas diagonalisable.

Si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$. Alors $Y \notin \mathrm{Ker}(A)$, ainsi en ajoutant Y à une base de $\mathrm{Ker}(A)$ on obtient une base constituée de vecteurs propres de A (même argument qu'en 1° (c) (ii)), ainsi A est diagonalisable.

On a bien montré : A est diagonalisable $\iff \mathrm{tr}(A) \neq 0$.

3° (a) Par l'absurde : on suppose $f(u) = 0$. Comme u engendre $\mathrm{Im}(f)$, pour tout $x \in E$ il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \alpha u$, ainsi $f^2(x) = \alpha f(u) = 0$, d'où $f \circ f = \widetilde{0}$, ce qui contredit l'hypothèse, ainsi $f(u) \neq 0$.

(b) On a $f(u) \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(u)$, ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = \lambda u$, de plus $u \neq 0$ donc u est vecteur propre de valeur propre λ. De plus, comme $f(u) \neq 0$ on a nécessairement $\lambda \neq 0$, on en déduit donc que f possède une valeur propre réelle non nulle.

(c) Soit $\mathcal{B}$ une base de E et on note A la matrice de f relativement à cette base. La matrice A est une matrice de rang 1 qui possède une valeur propre non nulle (qui est donc égal à sa trace), donc d'après 2° la matrice A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, il en va de même pour f.

Exercice 5 *(sur les matrices compagnon : d'après* CCP MP 2001 *Maths 2).*
Dans cet exercice $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un entier naturel, et χ_A le polynôme caractéristique de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On considère le polynôme $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ de $\mathbb{K}_n[X]$ et C_P sa matrice compagnon associée, c'est-à dire la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & . & . & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 & -a_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & . & . & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

(ie la matrice $C_P = (c_{i,j})$ est définie par $c_{i,j} = 1$ pour $i - j = 1$, $c_{i,n} = -a_{i-1}$ et $c_{i,j} = 0$ dans les autres cas).

1° Montrer que C_P est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$.

2° Calculer le polynôme caractéristique de la matrice C_P et déterminer une constante k telle que $\chi_{C_p} = kP$.

3° Soit Q un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$, déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\chi_A = Q$.

4° On note $C_P^\top$ la transposée de la matrice C_P.

a) Justifier la proposition : $\mathrm{Sp}(C_P) = \mathrm{Sp}(C_P^\top)$.

b) Soit λ élément de $\mathrm{Sp}(C_P^\top)$, déterminer (ie. l'écrire avec un Vect) le sous-espace propre de $C_P^\top$ associé à λ.

c) Montrer que $C_P^\top$ est diagonalisable si et seulement si P est scindé sur $\mathbb{K}$ et a toutes ses racines simples.

d) On suppose que P admet n racines $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ deux à deux distinctes, montrer que $C_P^\top$ est diagonalisable et en déduire que le déterminant de VANDERMONDE $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & . & . & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & . & . & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & . & . & \lambda_n^2 \\ . & . & . & . & . \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & . & . & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est non nul.

e) (rajout) Question de cours : Donner (sans démonstration) l'expression factorisée du déterminant de VANDERMONDE.

Correction :

1° On développe par rapport à la première ligne et on trouve $\det C_P = (-1)^{n+1}(-a_0) = (-1)^n a_0 = (-1)^n P(0)$, d'où le résultat.

2° On développe par rapport à la dernière colonne et on trouve :

$$\chi_{C_P}(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & \ldots & \ldots & 0 & a_0 \\ -1 & X & \ddots & & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & X & \ddots & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & & 0 & -1 & X & a_{n-2} \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= (X + a_{n-1}) \begin{vmatrix} X & 0 & \ldots & & 0 \\ -1 & X & \ddots & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \ldots & & -1 & X \end{vmatrix} - a_{n-2} \begin{vmatrix} X & 0 & \ldots & & 0 \\ -1 & X & \ddots & & \\ \vdots & & & & \\ 0 & \ldots & -1 & X & 0 \\ 0 & \ldots & & 0 & -1 \end{vmatrix} + \ldots$$

et on reconnaît $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 = P(X)$. Donc $k = 1$.

3° Il faut et il suffit que Q soit unitaire de degré n. En effet un polynôme caractéristique est toujours unitaire de degré n, cette condition est donc nécessaire, et à la question précédente on a montré que la question était suffisante.

4° a) Ce résultat n'est pas spécifique à C_p, il est vrai pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, en effet les valeurs propres sont les racines de χ_A qui se calcule par un déterminant, or le déterminant est invariant par transposition, de plus la transposition est linéaire, ainsi on a $X\mathrm{I}_n - A^\top = X\mathrm{I}_n - A^\top$ ce qui montre que $\chi_A = \chi_{A^\top}$ et donc l'égalité des spectres (car le spectre de A est l'ensemble des racines de χ_A).

b) on a $C_P^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & & -a_{n-1} \end{pmatrix}$, soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ddots \\ x_n \end{pmatrix}$. Ainsi X est vecteur propre de valeur propre λ si et seulement si il vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} x_2 & = \lambda x_1 \\ x_3 & = \lambda x_2 \\ \vdots & \\ x_n & = \lambda x_{n-1} \\ -a_0 x_1 & - \ldots - a_{n-1} x_n = \lambda x_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_i = \lambda^{i-1} x_1,\ \forall i \in [\![1, n]\!] \\ (-a_0 - a_1\lambda - \ldots - a_{n-1}\lambda^{n-1})x_1 \quad = \lambda^n x_1 \end{cases}$$

Donc, comme x_1 ne peut être nul (un vecteur propre n'est pas nul), on a donc que λ est racine de P et tout vecteur propre est multiple de $X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$, ie $E_\lambda\left(C_p^\top\right) = \mathrm{Vect}\left(X_\lambda\right)$.

c) On vient de constater que les espaces propres sont des droites, si la matrice $C_P^\top$ est diagonalisable alors la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut n, comme tous les sep sont de dimension 1 il doit donc y en avoir n, ie P possède n racines distinctes (elles sont donc toutes simples).

Réciproquement si P est scindé à racines simples alors le polynôme caractéristique de $C_P^\top$ l'est aussi, ainsi $C_P^\top$ est diagonalisable.

d) Si P est scindé à racines simples, comme on vient de le voir une matrice de passage qui diagonalise $C_P^\top$ est $V = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n \\ \vdots & & \\ \lambda_1^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}$, qui est inversible puisque matrice de passage !

e) C'est : $\displaystyle\prod_{0 \le i < j \le n} \lambda_j - \lambda_i$.