DS $5^\star$: vendredi 20 décembre

Correction

Exercice 1 *(proche du cours et/ou des TDs).*

Correction :

1° Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a comme polynôme caractéristique X^2 qui est scindé (ainsi N est trigonalisable, bon étant donné qu'elle est triangulaire supérieure ...), elle n'est pas diagonalisable, en effet si elle l'était, il existerait $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tel que $N = PDP^{-1}$ avec $D = 0$, ainsi on aurait $N = 0$, ce qui n'est pas le cas.

Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ a comme polynôme caractéristique $X^2 + 1$ qui n'est pas scindé, ainsi M n'est pas trigonalisable.

2° On trouve $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Comme $A^n = PD^nP^{-1}$ on trouve que : $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3 \cdot 2^n + 2 & 3 \cdot 2^n - 3 & 2^{n+1} - 2 \\ -2^{n+1} + 2 & 2^{n+2} - 3 & 2^{n+1} - 2 \\ 2^{n+1} - 2 & -3 \cdot 2^n + 3 & -2^n + 2 \end{pmatrix}$.

3° (a) On a : $\chi_f(X) = \ldots = (X-1)^2(X-2)$. Ainsi $\mathrm{Sp}(f) = \{1, 2\}$

(b) On note $u = (1,1,0)$ et $w = (1,0,1)$ et on trouve $E_1(f) = \mathrm{Vect}(u)$ et $E_2(f) = \mathrm{Vect}(w)$. Comme $\dim(E_1(f)) = 1 \neq 2 = m_1$, f n'est pas diagonalisable.

(c) On résout $f(x,y,z) - (x,y,z) = (1,1,0)$ et on trouve que $v = (0,0,1)$ convient.

(d) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, comme $\det(P) = -1$, la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$, comme $f(u) = u$, $f(v) = u + v$ et $f(w) = 2w$, on a donc $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4° Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On applique la formule du binôme :

$$P_n = \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{i}^k X^k - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \mathrm{i}^k X^k \right) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \sum_{k=0}^{n} (1 - (-1)^k) \binom{n}{k} \mathrm{i}^k X^k.$$

Or $1 - (-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ pair} \\ 2 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$, ainsi il ne reste que les valeurs impaires de k dans la somme, or si k est impair alors i^k est un imaginaire pur, avec le $\frac{1}{\mathrm{i}}$ devant on remarque que tous les coefficients sont réels. Ainsi $P_n \in \mathbb{R}[X]$.

On a $\deg(P_n) \leq n$, le coefficient devant X^n est $\frac{1-(-1)^n}{2\mathrm{i}} \mathrm{i}^n$, qui est non nul si n est impair, dans ce cas $\deg(P_n) = n$, si n est pair le coefficient devant X^n vaut 0 et le coefficient devant X^{n-1} vaut $\frac{1-(-1)^{n-1}}{2\mathrm{i}} n\mathrm{i}^n$ qui est non nul, ainsi $\deg(P_n) = n - 1$ dans ce cas.

Ainsi $\deg(P_n) = \begin{cases} n - 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$.

5° Tout d'abord, si $P = c$ alors :$(P')^2 = 4P \iff P = 0$, ainsi le polynôme nul est l'unique solution constante.
Si P est un polynôme non constant solution de $(P')^2 = 4P$, alors en notant $n = \deg(P)$, on a $\deg(P') = n - 1$ ainsi $2n - 2 = n$ ie $n = 2$. Ainsi les solutions non constante sont nécessairement de degré 2. Considérons maintenant $P = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2 (ainsi $a \neq 0$). On a : $(P')^2 = 4P \iff (2aX + b)^2 = 4aX^2 + 4bX + 4c \iff \begin{cases} 4a^2 & = 4a \\ 4ab & = 4b \\ b^2 = 4c \end{cases} \iff \begin{cases} a & = 1 \\ 0 & = 0 \\ b^2 = 4c \end{cases}$ (car $a \neq= 0$), ainsi P est solution si et seulement si $a = 1$ et $c = \frac{b^2}{4}$. En en déduit donc que les solutions sont les $P = X^2 + bX + \frac{b^2}{4}$ où $b \in \mathbb{R}$ ainsi que $P = 0$.

Exercice 2 *Autour des matrices de Toeplitz (*CENTRALE PSI 2018 *Maths 1, sans III.B et III.C)***.**

I – Généralités et quelques exemples

I.A – Généralités

Correction :

1° Notons, pour $k \in [\![-(n-1), n-1]\!]$, D_k la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui a en position (i,j) la valeur $\delta_{j-i,k} = \begin{cases} 1 & \text{si } j-i=k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On a directement que $T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} t_k D_k$, ce qui montre que $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{Vect}(D_{-(n-1)}, \dots, D_{n-1})$, ainsi $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De plus si $(\lambda_{-(n-1)}, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{C}^{2n-1}$ est tel que $\sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \lambda_k D_k = 0$,la première ligne de l'égalité donne $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$, tandis que la première colonne donne $\lambda_0 = \lambda_{-1} = \dots = \lambda_{-(n-1)} = 0$, ainsi la famille $(D_{-(n-1)}, \dots, D_{n-1})$ est libre, donc une base de $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$, ce qui montre que $\dim(\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})) = 2n-1$.

2° On suppose $AB = BA$, ainsi $A^2B = AAB = ABA = BAA = BA^2$ et par récurrence directe sur $k \in \mathbb{N}$, on a $A^kB = BA^k$, ce qui montre que $P(A)$ et B commutent, on applique le même résultat à B et $P(A)$ pour avoir directement que $Q(B)$ et $P(A)$ commutent.

I.B – Cas de la dimension 2

Correction :

3° On a $\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X-a & -b \\ -c & X-a \end{vmatrix} = (X-a)^2 - bc.$

4° Si $bc \neq 0$, alors il existe $\delta \neq 0$ tel que $bc = \delta^2$, ainsi $\chi_A(X) = (X-a-\delta)(X-a+\delta)$, comme $\delta \neq 0$, χ_A est scindé simple et donc A est diagonalisable.
Si $bc = 0$, alors $\chi_A = (X-a)^2$, ainsi A ne possède qu'une unique valeur propre a, si elle est diagonalisable alors il existe $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $A = PaI_2P^{-1} = aI_2$, ce qui n'est le cas que si $b = c = 0$ (dans les autres cas A n'est pas diagonalisable).
On a donc montré que A est diagonalisable si et seulement si b et c sont tous les deux non nuls ou s'ils sont tous les deux nuls.

5° Comme on est dans $\mathbb{C}$ et que χ_C est de degré deux, il possède deux racines α et β.
— Si $\alpha \neq \beta$, alors M est diagonalisable donc est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.
— Si $\alpha = \beta$, alors M est au moins trigonalisable (car χ_M est scindé) , donc semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

6° Comme $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ est une matrice de Toeplitz, dans le deuxième cas de la question précédente on a bien que M est semblable à une matrice de Toeplitz. Montrons le dans le premier cas.
Pour cela on note que $\chi_M(X) = (X-\alpha)(X-\beta) = X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta = (X - \frac{\alpha+\beta}{2})^2 - \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} + \alpha\beta$. On introduit la matrice de Toeplitz $N = \begin{pmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2} & \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} - \alpha\beta \\ 1 & \frac{\alpha+\beta}{2} \end{pmatrix}$, comme $\chi_N(X) = (X - \frac{\alpha+\beta}{2})^2 - \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} + \alpha\beta = (X-\alpha)(X-\beta)$ on a (puisque χ_N est scindé simple) que N est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ donc semblable à M (par transitivité de la relation d'être semblable).
Ce qui montre bien toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de Toeplitz.

I.C – Un autre cas particulier : les matrices tridiagonales

Correction :

7° Comme $A_n(a,b,c)X = \lambda X$, on a : $ax_1 + bx_2 = \lambda x_1$, pour $k \in [\![2, n-1]\!]$, $cx_{k-1} + ax_k + bx_{k+1} = \lambda x_k$ et $cx_{n-1} + ax_n = \lambda x_n$, ainsi, avec $x_0 = x_{n+1} = 0$, on a bien, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, que $bx_{k+2} + (a-\lambda)x_{k+1} + cx_k = 0$.

8° Comme $b \neq 0$ (puisque $bc \neq 0$), on est en présence d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2, si l'équation I.1 possède deux racines distinctes $r_1 \neq r_2$ alors il existe K_1 et K_2 dans $\mathbb{C}$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_k = K_1 r_1^k + K_2 r_2^k$, tandis que si I.1 possède une racine double r_0, alors il existe K_1 et K_2 dans $\mathbb{C}$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x_n = (K_1 + K_2 k) r_0^k$.

9° Si l'équation I.1 avait une racine double alors $0 = x_0 = K_1$ et $0 = x_{n+1} = (K_1 + K_2(n+1))r_0^{n+1} = K_1 r_0^{n+1}$. Comme 0 n'est pas solution de I.1 (puisque $c \neq 0$ car $bc \neq 0$) on a donc $r_0 \neq 0$, ainsi $K_2 = 0$, ce qui implique que $x_1 = \ldots = x_n = 0$ et donc $X = 0$, ce qui est absurde puisque X est un vecteur propre. Ce qui montre que I.1 possède deux racines distinctes.

10° Comme utilisé précédemment, 0 n'est pas solution de I.1, ainsi $r_1 \neq 0$ et $r_2 \neq 0$. Comme $x_0 = 0$, on a $K_1 + K_2 = 0$ et comme $x_{n+1} = 0$, on a que $K_1 r_1^{n+1} + K_2 r_2^{n+1} = 0$, ce qui implique (puisque $K_1 = -K_2 \neq 0$, comme à la question précédente puisque $X \neq 0$) que $r_1^{n+1} = r_2^{n+1}$, ie $(r_1/r_2)^{n+1} = 1$ (car $r_2 \neq 0$) et ainsi r_1/r_2 appartient à $\mathbb{U}_{n+1}$.

11° On a $bx^2 + (a-\lambda)x + c = b(x-r_1)(x-r_2) = bx^2 - b(r_1+r_2)x + br_1r_2$, ainsi $r_1 + r_2 = \frac{\lambda - a}{b}$ et $r_1 r_2 = \frac{c}{b}$.
Ce qui montre que $\lambda = a + b(r_1 + r_2)$. Comme r_1/r_2 est une racine $(n+1)$-ième de l'unité, il existe un entier $\ell \in [\![0, n]\!]$ tel que $r_1/r_2 = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\ell\pi}{n+1}}$, comme $r_1 \neq r_2$, on a $\ell \neq 0$.
On a : $\lambda = a + br_2(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\ell\pi}{n+1}} + 1) = a + br_2 \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\ell\pi}{n+1}}(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\ell\pi}{n+1}}) + \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\ell\pi}{n+1}}) = a + 2br_2\cos(\frac{\ell\pi}{n+1})\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\ell\pi}{n+1}}$, posons maintenant $\rho = br_2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\ell\pi}{n+1}}$, on a $\rho^2 = b^2 r_2^2 \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\ell\pi}{n+1}} = b^2 r_2 r_1 = b^2 \frac{c}{b} = bc$. On a bien montré l'existence d'un ρ tel que $\rho^2 = bc$ et d'un $k \in [\![1, n]\!]$ tels que $\lambda = a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)$.

12° Posons $\alpha = K_1$, ainsi, pour $k \in [\![0, n]\!]$, $x_k = \alpha(r_1^k - r_2^k) = \alpha r_2^k(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\ell k\pi}{n+1}} - 1) = \alpha r_2^k \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\ell k\pi}{n+1}}(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\ell k\pi}{n+1}} - \mathrm{e}^{\frac{-2\mathrm{i}\ell k\pi}{n+1}}) = 2\mathrm{i} r_2^k \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\ell k\pi}{n+1}} \sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)$. Il ne reste plus qu'a utiliser $\frac{\rho}{b} = r_2 \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\ell\pi}{n+1}}$, pour avoir $x_k = 2\mathrm{i}\alpha\frac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)$.

13° Faisons la synthèse. Soit $\rho \in \mathbb{C}$ tel que $\rho^2 = bc$, soit $\ell \in [\![1, n]\!]$, notons $\lambda_\ell = a + 2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)$ et posons, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k = 2\mathrm{i}\frac{\rho^k}{b^k}\sin\left(\frac{\ell k\pi}{n+1}\right)$, posons enfin $X_\ell = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, notre vecteur X_ℓ est non nul, reste à montrer que $A_n(a,b,c)X_\ell = \lambda_\ell X_\ell$.
Pour cela il suffit de montrer qu'on a $bx_{k+2} + (a-\ell)x_{k+1} + cx_k = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ (et où on a rajouté $x_0 = x_{n+1} = 0$.
On remarque, pour $k \in [\![1, n]\!]$, que l'on a $x_k = \frac{\rho^k}{b^k}\left(\mathrm{e}^{\frac{\ell k\pi}{n+1}} - \mathrm{e}^{\frac{-\ell k\pi}{n+1}}\right) = r_1^k - r_2^k$ où on a posé $r_1 = \frac{\rho\mathrm{e}^{\frac{\ell\pi}{n+1}}}{b}$ et $r_2 = \frac{\rho\mathrm{e}^{\frac{-\ell\pi}{n+1}}}{b}$. Il ne reste plus qu'a montré que r_1 et r_2 sont les solutions (elles sont bien distinctes) de $bx^2 + (a-\lambda_\ell)x + c = 0$, or $r_1 r_2 = \frac{\rho^2}{b^2} = \frac{c}{b}$ et $r_1 + r_2 = \frac{2\rho\cos\left(\frac{\ell\pi}{n+1}\right)}{b} = \frac{\lambda_\ell - a}{b}$, ainsi $b(x-r_1)(x-r_2) = bx - b(r_1+r_2) + br_1r_2 = bx^2 + (a-\lambda_\ell)x + c$.

Ainsi X_ℓ est vecteur propre de $A_n(a,b,c)$ de valeur propre λ_ℓ, or les λ_ℓ sont deux à deux distincts (par stricte décroissance du cosinus sur $[0, \pi]$), ainsi $A_n(a,b,c)$ possède n valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable.

II – Matrices circulantes

Correction :

14° On a $M_n^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 & \\ 1 & \ddots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$,ie les "diagonales ont été remontées", et ainsi de suite jusque

$M_n^{n-1}=\begin{pmatrix}0&\cdots&\cdots&\cdots&0&1\\1&\ddots&&&&0\\0&\ddots&\ddots&&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0&1&0\end{pmatrix}$ et enfin $M_n^n=I_n$. Ainsi M_n est inversible (d'inverse M_n^{n-1}) et $P=X^n-1$ est un polynôme annulateur de M_n.

15° Comme $P=X^n-1$ est scindé à racine simple (les racines n-ième de l'unité) , la matrice M_n est diagonalisable.
Or $\chi_{M_n}(X)=\begin{vmatrix}X&-1&0&\cdots&0\\0&X&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&0\\0&&&\ddots&-1\\-1&0&\cdots&\cdots&X\end{vmatrix}=X^n-1$ (développement suivant la première colonne). Ainsi $\mathrm{Sp}(M_n)=\{1,\omega_n,\omega_n^2,\dots,\omega_n^{n-1}\}$.
Pour $k\in[\![0,n-1]\!]$, posons $X_k=\begin{pmatrix}1\\\omega_n^k\\\omega_n^{2k}\\\vdots\\\omega_n^{(n-1)k}\end{pmatrix}$, ainsi $X_k\neq 0$ et on remarque que $M_nX_k=\omega_n^kX_k$. Ce qui montrer que $E_{\omega_n^k}=\mathrm{Vect}(X_k)$.

16° Comme les colonnes de la matrice Φ_n ne sont rien d'autre que les X_k, Φ_n est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{C}^n$ vers la base de diagonalisation $(X_0,\dots,X_{n-1})$, ainsi $\Phi_n^{-1}M_n\Phi_n=\mathrm{diag}(1,\omega_n,\omega_n^2,\dots,\omega_n^{n-1})$.

17° Soit $A=T(t_1,t_2,\dots,t_0,t_1,\dots,t_{n-2},t_{n-1})$ une matrice circulante, on a $A=t_0I_n+t_1M_n+t_2M_n^2+\dots t_{n-1}M_n^{n-1}$, ainsi en posant $P=t_0+t_1X+\dots+t_{n-1}X^{n-1}$, on a $A=P(M_n)$.

18° Par théorème de division euclidienne, il existe $Q\in\mathbb{C}[X]$ et $R\in\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $P=(X^n-1)Q+R$. Ainsi $P(M_n)=(M_n^n-I_n)Q(M_n)+R(M_n)=R(M_n)$ puisque X^n-1 est annulateur de M_n, en notant, pour $k\in[\![0,n-k]\!]$, t_k le coefficient devant X^k dans R, on a que $P(M_n)=t_0I_n+t_1M_n+t_2M_n^2+\dots t_{n-1}M_n^{n-1}=T(t_1,t_2,\dots,t_0,t_1,\dots,t_{n-2},t_{n-1})$, ainsi $P(M_n)$ est circulante.

19° La matrice nulle est circulante, si A et B sont circulantes et $\lambda\in\mathbb{C}$, alors il existe deux polynômes P_A et P_B tels que $A=P_A(M_n)$ et $B=P_B(M_n)$, ainsi $A+\lambda B=(P_A+\lambda P_B)(M_n)$, ainsi $A+\lambda B$ est circulante. Ainsi l'ensemble des matrices circulantes est un sev $\mathrm{Toep}_n(\mathbb{C})$.
Si A et B sont circulantes, alors il existe deux polynômes P_A et P_B tels que $A=P_A(M_n)$ et $B=P_B(M_n)$, ainsi $AB=P_A(M_n)P_B(M_n)=(P_AP_B)(M_n)$ et donc AB est circulante, d'où la stabilité par produit.
Enfin si A est circulante, alors $A^\top$ l'est aussi (pour $k\in[\![1,n-1]\!]$, on pose $t'_k=t_{n-k}$ et ainsi si $A=T(t_1,t_2,\dots,t_0,t_1,\dots,t_{n-2},t_{n-1})$ alors $A^\top=T(t'_1,t'_2,\dots,t'_0,t'_1,\dots,t'_{n-2},t'_{n-1})$).

20° Soit A un matrice circulante et $P=\sum_{\ell=0}^{n-1}t_\ell X^\ell\in\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que $A=P(M_n)$. Comme, pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$, on a $M_nX_k=\omega_nX_k$, par récurrence directe, pour tout $\ell\in\mathbb{N}$, $M_n^\ell X_k=\omega_n^{\ell k}X_k$, on en déduit donc que $P(M_n)X_k=P(\omega_n^k)X_k$. Ainsi $(X_0,X_1,\dots,X_{n-1})$ est une base de diagonalisation de la matrice circulante $A=P(M_n)$ et $\mathrm{Sp}(A)=\{P(1),P(\omega_n),\dots,P(\omega_n^{n-1}))$

III – Étude des matrices cycliques

III.A – Endomorphismes et matrices cycliques

Correction :

21° On suppose qu'il existe $x_0\in\mathbb{C}^n$ tel que $(x_0,\dots,f_M^{n-1}(x_0))$ est une base de $\mathbb{C}_n$,alors on décompose $f_M^n(x_0)\in\mathbb{C}^n$ dans cette base en $f_M^n(x_0)=a_0x_0+a_1f_M(x_0)+\dots+a_{n-1}f_M^{n-1}(x_0)$, et puisque pour $k\in[\![0,n-2]\!]$ on a $f_M(f_M^k(x_0))=f_M^{k+1}(x_0)$, la matrice représentant f_M dans cette base n'est rien d'autre que $C(a_0,\dots,a_{n-1})$, ainsi M et $C(a_0,\dots,a_{n-1})$ sont semblables.
Réciproquement on suppose qu'il existe $(a_0,\dots,a_{n-1})$ tel que M et $C(a_0,\dots,a_{n-1})$ sont semblables, ainsi il existe une base $x_0,x_1,\dots,x_{n-1})$ de $\mathbb{C}^n$ tel que la matrice de f_M dans cette base soit $C(a_0,\dots,a_{n-1})$, ainsi $f_M(x_0)=x_1$, $f_M^2(x_0)=f_M(x_1)=x_2$ et ainsi de suite jusque $f_M^{n-1}(x_0)=x_{n-1}$, ce qui montre bien que

$(x_0, \dots, f_M^{n-1}(x_0))$ est une base de $\mathbb{C}_n$.
Ainsi (i) et (ii) sont bien équivalents.

22° Comme $u = u_1e_1 + \dots + u_ne_n$, ainsi $f_M(u) = \lambda_1u_1e_1 + \dots + \lambda_nu_ne_n$, ainsi, par récurrence directe sur $k \in [\![1, n]\!]$, on a que $f_M^k(u) = \sum_{i=1}^{n} \lambda^k u_k e_k$, ainsi la matrice représentant la famille $(u, f_M(u), \dots, f_M^{n-1}(u)))$ est $F = \begin{pmatrix} u_1 & \lambda_1u_1 & \lambda_1^2u_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1}u_1 \\ \vdots & & \vdots & & \\ u_n & \lambda_nu_n & \lambda_n^2u_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}u_n \end{pmatrix}$, ainsi (multilinéarité du déterminant) : $\det(F) = u_1 \dots u_n \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ \vdots & & \vdots & & \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$, on reconnait un déterminant de Vandermonde, ainsi $\det(F) = u_1 \dots u_n \prod_{1 \le i < j \le n} \lambda_j - \lambda_i$. Ce déterminant est non nul si et seulement si tous les u_i sont non nuls et les λ_i deux à deux distincts, cette non nullité caractérise que la famille est une base de $\mathbb{C}^n$

23° Un endormophisme diagonalise est cyclique si et seulement si ses valeurs propres sont deux à deux distinctes. En effet si les λ_i ne sont pas deux à deux distincts, la famille $(u, f_M(u), \dots, f_M^{n-1}(u))$ n'est jamais une base d'après la question précédente, si les λ_i sont deux à deux distincts, en prenant $u = u_1e_1 + \dots + u_ne_n$ avec tous les u_i non nuls (par exemple en prenant $u_1 = \dots = u_n = 1$) alors u est un vecteur cyclique de f_M.

24° Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Le système $C(a_0, \dots, a_{n-1})X = \lambda X$ n'est rien d'autre que le système : $\begin{cases} a_0x_n = \lambda x_0 \\ x_1 + a_1x_n = \lambda x_1 \\ \vdots \\ x_{n-2} + a_{n-2}x_{n-1} = \lambda x_{n-1} \\ x_{n-1} + a_{n-1}x_n = \lambda x_n \end{cases}$. On ne prend pas de risque et on procède par double implication. On remarque tout d'abord que si $x_n = 0$ alors la dernière équation donne $x_{n-1} = 0$, l'avant dernière $x_{n-2} = 0$ jusqu'à la deuxième qui donne $x_1 = 0$, ainsi si $x_n = 0$ alors X n'est pas vecteur propre.
On suppose que λ est valeur propre et que X est un vecteur propre associé, on a ainsi $x_n \neq 0$ et la dernière équation donne $x_{n-1} = (\lambda - a_{n-1})x_n$, l'avant dernière donne $x_{n-2} = (\lambda^2 - a_{n-1}\lambda - a_{n-2})x_n$ et ainsi de suite jusque la deuxième $x_1 = (\lambda^{n-1} - a_{n-2}\lambda^{n-2} - \dots - a_1)x_n$, et enfin avec la première (en divisant par $x_n \neq 0$) : $\lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - a_0 = 0$, ainsi λ est racine de $P(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_0$.
Réciproquement on suppose λ racine de P, on pose $x_n = 1$, puis $x_{n-1} = \lambda x_n - a_{n-1}x_n = \lambda - a_{n-1}$, puis $x_{n-2} = \lambda x_{n-1} - a_{n-2}x_n = \lambda^2 - a_{n-1}\lambda - a_{n-2}$, etc. jusque $x_1 = \lambda x_2 - a_1x_n = \lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} - \dots - a_1$, par construction X vérifie toutes les lignes du système à partir de la seconde, or $\lambda x_1 = \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - a_1\lambda$ et donc (avec $P(\lambda) = 0$) : $\lambda x_1 = a_0 = a_0x_n$. Ce qui montre bien que X est vecteur propre de valeur propre λ.
Ainsi λ est valeur propre si et seulement si λ est racine de $P(X) = X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \dots - a_0$.

25° Dans la question précédente, on a montré que la valeur de x_n déterminait complètement les autres coordonnées de X, ainsi les sous espaces propres sont de dimension 1, et on a montré que $\begin{pmatrix} \lambda^{n-1} - a_{n-1}\lambda^{n-2} - \dots - a_1 \\ \vdots \\ \lambda - a_{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}$ en était un vecteur directeur.

26° Comme tous les sous-espaces propres sont de dimension 1, $C(a_0, \dots, a_{n-1})$ est diagonalisable si et seulement s'il y a n valeurs propres distinctes.

27° D'après la question 2, comme f_M commute avec lui-même, on a que $P(f_M)$ et f_M commutent et donc $P(f_M) \in \mathcal{C}(f_M)$.

28° Soit $g \in \mathcal{C}(f_M)$, soit x_0 un vecteur cyclique de f_M, on décompose $g(x_0)$ dans la base $(x_0, f_M(x_0), \dots, f_M^{n-1}(x_0))$: $g(x_0) = \alpha_0x_0 + \alpha_1f_M(x_0) + \dots + \alpha_{n-1}f_M^{n-1}(x_0)$. On veut montrer que g et $h = \alpha_0Id_{\mathbb{C}^n} + \alpha_1f_M + \dots + \alpha_{n-1}f_M^{n-1}$ sont égaux, pour cela il suffit de montrer qu'ils coïncide sur la base $(x_0, f_M(x_0), \dots, f_M^{n-1}(x_0))$.
On a déjà $g(x_0) = h(x_0)$. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a (g et f_M commutent) : $g(f_M^k(x_0)) = f_M^k(x_0) = f_M^k\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_if_M^i(x_0)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_if_M^k(f_M^i(x_0)) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_if_M^i(f_M^k(x_0)) = h(f_M^k(x_0))$. Ainsi g est un polynôme en f_M.

29° Ce qui montre bien que $\mathcal{C}(f_M)$ est l'ensemble des polynômes en f_M.

30° Comme N est triangulaire, on lit ses valeurs propres sur sa diagonale, ainsi $\mathrm{Sp}(N) = \{0\}$, comme N est clairement de rang $n-1$, son noyau (d'après le théorème du rang) est de dimension 1, et on a clairement $E_0(N) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Ainsi, puisque $n \geq 2$, on a que N n'est pas diagonalisable.

31° Comme $N = C(0, \dots, 0)$, N est cyclique.

32° La matrice N n'est rien d'autre que la matrice D_{-1} de la question 3°, on notera que $N^2 = D_{-2}$ et ainsi de suite jusque $N^{n-1} = D_{n-1}$ et $N^n = 0$. Ainsi les combinaisons linéaires des puissances de N sont exactement les matrices de Toeplitz triangulaires inférieures. Or a montré en III.A.3) on a montré que le commutant d'une matrice cyclique était exactement les polynômes en cette matrice, ce qui donne bien le résultat escompté.