# DS 6 : samedi 25 janvier

4h sans calculatrice

Le candidat numérotera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

---

**Exercice 1** *(proche du cours et/ou des TDs)*.

1° Soit $X$ une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau :

| $x_i$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $1/6$ | $1/4$ | $1/6$ | $1/4$ | $1/6$ |

on pose ensuite $Y = X^2$.

(i) Déterminer la loi du couple $(X, Y)$ puis la loi de $Y$.

(ii) Déterminer $\mathrm{Cov}(X, Y)$. Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

2° Vrai/Faux Soit $(f_n)$ une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction $f$ sur un intervalle $I$. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses (démonstration ou contre-exemple).

(a) Dans le cas $I = \mathbb{R}$, si les $f_n$ sont toutes périodiques de période $T$ alors $f$ est aussi périodique de période $T$.

(b) Si les $f_n$ sont toutes continues alors $f$ l'est aussi.

3° Déterminer la limite simple des suites de fonctions suivantes, et déterminer si la convergence est uniforme ou non.

(a) $f_n(x) = x^n(1 - x)$ sur $[0, 1]$

(b) $f_n(x) = x^n(1 + x)$ sur $[0, 1]$

4° Soit la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de $f$.

(b) Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$.

(c) Calculer $f'$ (on l'exprimera sans somme) puis en déduire $f$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ (on ne cherchera pas a déterminer la constante).

---

**Exercice 2** *(*E3A MP 2016 *Maths 1 exercice 4)*.

Un fabricant de produits d'entretien pour machines à café fournit deux types de produits : un produit détartrant (produit A) et un produit dégraissant (produit B). Ce fabricant vend les produits conditionnés uniquement en boîtes contenant à la fois un produit A et un produit B. Cependant, pour rendre service à ses clients qui n'ont besoin que d'un seul produit, un commerçant accepte de vendre séparément les produits.

Pour la suite, on suppose que chaque client qui se présente chez le commerçant n'effectue qu'un seul achat. On suppose également que les choix (du produit A ou B) des clients sont indépendants. On fait également l'hypothèse qu'il ne reste aucune boîte entamée au début de la journée.

On considère que chaque client qui se présente chez ce commerçant achète le produit A avec la probabilité $p \in ]0, 1[$ et le produit B avec la probabilité $1 - p$. On note $X$ (respectivement $Y$) le nombre de produits A (respectivement de produits B) vendus au cours de la journée. On notera $Z = \max(X, Y)$.

1° On considère une journée où 4 clients se sont présentés. Déterminer la loi de $X$ , la loi de $Y$ et les espérances de ces deux variables aléatoires. Déterminer la loi de $Z$. Que représente cette variable aléatoire ?

On suppose maintenant que le nombre de personnes se présentant chez le commerçant durant une journée est une variable aléatoire réelle $N$ suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

2° Soit $n$ un entier naturel. Quelle est la loi de $X$ sachant que l'évènement $[N = n]$ est réalisé ?

3° Déterminer la loi conjointe du couple $(X, N)$.

4° En déduire la loi de $X$. Donner sans calcul les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

5° Démontrer que les variables aléatoires $X$ et $Y$ sont indépendantes.

6° En utilisant la relation $N = X + Y$, calculer $\mathrm{Cov}(X, N)$.

7° Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$S(k, x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!}$$

Exprimer $\mathbb{P}(Z \leq k)$ en fonction de $\lambda$, $S(k, \lambda p)$ et $S(k, \lambda(1 - p))$.

8° On utilise dans cette question le langage de programmation `PYTHON`.

(a) Définir la fonction `S(k,x)` qui calcule $S(k, x)$ à partir des valeurs de $k$ et $x$ données.

(b) On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$, $\lambda = 10$ et que le commerçant constate au début de la journée qu'il lui reste exactement 5 boîtes, aucune n'étant entamée. Écrire les instructions permettant d'afficher la probabilité que le commerçant tombe en rupture de stock au cours de la journée.

---

**Exercice 3** *(*CCP PC 2011 *Maths 2, partie I)***.**

### Partie I

Soit $\sum u_n$ la série de fonctions d'une variable réelle de terme général $u_n$ défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}$

I.1.

I.1.1. Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On note $U = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ la somme de la série de fonctions $\sum u_n$.

I.1.2. Montrer que, pour tout $a > 0$ , $\sum u_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.
La série $\sum u_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$ ?

I.1.3. Montrer que $U$ est continue sur $\mathbb{R}$.

I.2.

I.2.1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer la primitive qui s'annule en 0 de la fonction $u_n$.

I.2.2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite de fonctions définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.
Montrer que $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

I.2.3. On note $V = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ la somme de la série de fonctions $\sum v_n$.
Montrer que $V$ est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction $U$.

I.3. On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$ définie par :
— pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p_0(x) = x$ ;
— pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p_n(x) = x \displaystyle\prod_{k=1}^{k=n}\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.

Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ , lorsque $n$ tend vers $+\infty$, vers une fonction $p$ que l'on exprimera à l'aide de $V$ puis de $U$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ , la limite donnant $p(x)$ sera alors notée : $p(x) = x \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.

---

**Exercice 4** *(Fonction zeta de Riemann, exercice 1* E3A PC 2017 *Maths 1)***.**

On considère la fonction $\zeta$ de la variable réelle $x$ définie par la relation $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ lorsque cette notation a un sens.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère la fonction $f_n$ définie sur $]1;\ +\infty[$ par : $\forall x \in ]1;\ +\infty[,\ f_n(x) = \dfrac{1}{n^x}$

1° Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\zeta$.

2° Soit $a \in ]1;\ +\infty[$. Montrer que la fonction $\zeta$ est continue sur l'intervalle $[a;\ +\infty[$.
Que peut-on en déduire pour la continuité de la fonction $\zeta$ ?

3° Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

(a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in ]1;\ +\infty[,\ f_n^{(k)}(x) = \dfrac{(-\ln(n))^k}{n^x}$.

(b) Montrer que la fonction $\zeta$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1;\ +\infty[$ et donner l'expression de $\zeta^{(k)}(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ et tout $x \in ]1;\ +\infty[$ sous forme d'une série.

4° Préciser le sens de variation de $\zeta$.

5° On se propose dans cette question de justifier l'existence et de déterminer la valeur de la limite de la fonction $\zeta$ en $+\infty$.

(a) Montrer que $\zeta$ possède une limite finie en $+\infty$.

(b) Soit $N \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que : $\forall x \geq 2,\ 1 \leq \zeta(x) \leq \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

(c) En déduire la valeur de la limite de $\zeta$ en $+\infty$.

6° On considère à présent $h \in ]0;\ +\infty[$.
À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un encadrement de $\zeta(1+h)$ puis un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque $x$ tend vers 1.

7° Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction $\zeta$.

8° On pose : $\forall x \in ]0;\ +\infty[,\ F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.

(a) Justifier que $F$ est bien définie.

(b) Monter que $F$ est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(c) Montrer que : $\forall x \in ]1;\ +\infty[,\ \zeta(x) + F(x) = 2^{1-x}\zeta(x)$.

(d) Déterminer ensuite la limite de $F$ en $+\infty$.

---

**Exercice 5** *(*E3A PC 2020 *Ex 1)***.**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et la matrice $M_a = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1° Pour quelles valeurs du réel $a$ la matrice $M_a$ est-elle diagonalisable ?

2° Pour quelles valeurs du réel $a$ la matrice $M_a$ est-elle inversible ?

3° Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable, $M_a$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.