DS 6 : samedi 25 janvier

4h sans calculatrice

Le candidat numérotera ses pages, il encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1 *(proche du cours et/ou des TDs)*.

1° Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par le tableau :

x_i	-2	-1	0	1	2
p_i	$1/6$	$1/4$	$1/6$	$1/4$	$1/6$

on pose ensuite $Y = X^2$.

(i) Déterminer la loi du couple (X, Y) puis la loi de Y.

(ii) Déterminer $\operatorname{Cov}(X, Y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

2° Vrai/Faux Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge simplement vers une fonction f sur un intervalle I. Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses (démonstration ou contre-exemple).

(a) Dans le cas $I = \mathbb{R}$, si les f_n sont toutes périodiques de période T alors f est aussi périodique de période T.

(b) Si les f_n sont toutes continues alors f l'est aussi.

3° Déterminer la limite simple des suites de fonctions suivantes, et déterminer si la convergence est uniforme ou non.

(a) $f_n(x) = x^n(1-x)$ sur $[0, 1]$

(b) $f_n(x) = x^n(1+x)$ sur $[0, 1]$

4° Soit la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$.

(a) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.

(b) Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^\star)$.

(c) Calculer f' (on l'exprimera sans somme) puis en déduire f sur $\mathbb{R}_+^\star$ (on ne cherchera pas a déterminer la constante).

Correction :

1° (i) $Y(\Omega) = \{0, 1, 4\}$, $\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = j)) = 0$ si $j \neq i^2$, $\mathbb{P}((X = i) \cap (Y = i^2)) = P(X = i)$.
$\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0) = 1/6$, $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = -1) = 1/2$, $\mathbb{P}(Y = 4) = 1/3$.

(ii) $\mathbb{E}(X) = 0$ par symétrie de même $\mathbb{E}(XY) = 0$ donc $\operatorname{Cov}(X, Y) = 0$.
Pourtant X et Y ne sont pas indépendantes : $\mathbb{P}((X = 1) \cap (Y = 0)) = 0$ mais $\mathbb{P}(X = 1) > 0$ et $\mathbb{P}(Y = 0) > 0$.

2° (a) C'est vrai. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n(x + T) = f_n(x)$, en faisant $n \to +\infty$, avec la convergence simple, on obtient $f(x + T) = f(x)$. Cette dernière égalité étant vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a ainsi que f est T-périodique.

(b) C'est faux ! Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in [0, 1]$ on pose $f_n(x) = x^n$, toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0, 1]$ mais la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par $f(x) = 0$ pour $x \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$ qui n'est pas continue sur $[0, 1]$.

3° (a) Pour $x = 1$ on a $f_n(1) = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et, pour $x \in [0, 1[$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ainsi (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
Déterminons si la convergence est uniforme. Soit $n \geq 2$, la fonction f_n est dérivable sur $[0, 1]$ et pour $x \in [0, 1]$ on a $f_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n - (n+1)x)$, ainsi f_n' est positive sur $[0, \frac{n}{n+1}]$ et négative sur $[\frac{n}{n+1}, 1]$, ainsi f_n est croissante puis décroissante, de plus $f_n(0) = f_n(1) = 0$ (faire le tableau de variation). On en déduit que $\|f_n\|_\infty = f_n(\frac{n}{n+1}) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n (1 - \frac{n}{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} (1 - \frac{n}{n+1})$. Or $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = \exp\left(-n\left(\frac{-1}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}(\frac{1}{n})\right)\right) = \exp\left(1 + \underset{n\to+\infty}{o}(1)\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}$. Ainsi $\|f_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. La convergence de (f_n) vers la fonction nulle est donc uniforme sur $[0, 1]$.

(b) Pour $x=1$ on a $f_n(1)=2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$ et, pour $x\in[0,1[$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ainsi (f_n) converge simplement vers la fonction f qui vaut 2 en 1 et 0 sur $[0,1[$. Comme toutes les fonctions f_n sont continues sur $[0,1]$ et que f ne l'est pas la convergence ne peut pas être uniforme sur $[0,1]$.

4° Notons, pour $n\in\mathbb{N}^\star$ et $x\in\mathbb{R}$, $u_n(x)=(-1)^{n+1}\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$.

(a) Si $x<0$, $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement. Si $x=0$ on a la série harmonique alternée (qui converge d'après le TSA, on n'oubliera pas de préciser les hypothèses du TSA) et si $x>0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2(-1)^{n+1}\dfrac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}=0$, ainsi $u_n(x)=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et donc la série $\sum u_n(x)$ cva (donc cv).
Ainsi $\mathcal{D}=\mathbb{R}_+$.

(b) Appliquons le théorème de dérivation $\mathcal{C}^1$ des séries de fonctions.
La série $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^\star$ d'après la question précédente.
Les fonctions $u_n : x\mapsto(-1)^n e^{-nx}$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$.
La série des dérivées, $\sum u_n'(x)=\sum(-1)^n e^{-nx}$, converge normalement sur tout segment $[a,b]\subset\mathbb{R}_+^\star$; en effet : $\forall x\in[a,b], |u_n'(x)|\le \mathrm{e}^{-na}$, ainsi $\|u_n'\|_\infty^{[a,b]}\le\mathrm{e}^{-na}$ et $\sum\mathrm{e}^{-na}$ converge (série géométrique de raison $-1<\mathrm{e}^{-a}<1$).

On en déduit donc que f est $\mathcal{C}^1$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+^\star$ donc sur $\mathbb{R}_+^\star$ et, pour $x>0$, on a $f'(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_n'(x)$.

(c) $\sum u_n'(x)$ est une série géométrique, on peut donc calculer sa somme : $f'(x)=\dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$. En intégrant on trouve qu'il existe C tel que, pour tout $x\ge0$, on ait $f(x)=\ln(1+e^{-x})+C$.

Exercice 2 *(*E3A MP 2016 *Maths 1 exercice 4).*

Un fabricant de produits d'entretien pour machines à café fournit deux types de produits : un produit détartrant (produit A) et un produit dégraissant (produit B). Ce fabricant vend les produits conditionnés uniquement en boîtes contenant à la fois un produit A et un produit B. Cependant, pour rendre service à ses clients qui n'ont besoin que d'un seul produit, un commerçant accepte de vendre séparément les produits.

Pour la suite, on suppose que chaque client qui se présente chez le commerçant n'effectue qu'un seul achat. On suppose également que les choix (du produit A ou B) des clients sont indépendants. On fait également l'hypothèse qu'il ne reste aucune boîte entamée au début de la journée.

On considère que chaque client qui se présente chez ce commerçant achète le produit A avec la probabilité $p\in]0,1[$ et le produit B avec la probabilité $1-p$. On note X (respectivement Y) le nombre de produits A (respectivement de produits B) vendus au cours de la journée. On notera $Z=\max(X,Y)$.

1° On considère une journée où 4 clients se sont présentés. Déterminer la loi de X , la loi de Y et les espérances de ces deux variables aléatoires. Déterminer la loi de Z. Que représente cette variable aléatoire ?

On suppose maintenant que le nombre de personnes se présentant chez le commerçant durant une journée est une variable aléatoire réelle N suivant une loi de Poisson de paramètre λ.

2° Soit n un entier naturel. Quelle est la loi de X sachant que l'évènement $[N=n]$ est réalisé ?

3° Déterminer la loi conjointe du couple (X,N).

4° En déduire la loi de X. Donner sans calcul les valeurs de $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

5° Démontrer que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

6° En utilisant la relation $N=X+Y$, calculer $\mathrm{Cov}(X,N)$.

7° Pour $k\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, on note :

$$S(k,x)=\sum_{j=0}^{k}\frac{x^j}{j!}$$

Exprimer $\mathbb{P}(Z\le k)$ en fonction de λ, $S(k,\lambda p)$ et $S(k,\lambda(1-p))$.

8° On utilise dans cette question le langage de programmation `PYTHON`.

(a) Définir la fonction `S(k,x)` qui calcule $S(k,x)$ à partir des valeurs de k et x données.

(b) On suppose dans cette question que $p=\frac{1}{2}$, $\lambda=10$ et que le commerçant constate au début de la journée qu'il lui reste exactement 5 boîtes, aucune n'étant entamée. Écrire les instructions permettant d'afficher la probabilité que le commerçant tombe en rupture de stock au cours de la journée.

Correction :

1° X représente le nombre de clients qui achètent le produit A, comme les choix des clients sont indépendants on a donc affaire à une loi binomiale, ainsi $X \sim \mathcal{B}(4,p)$, ainsi $\mathbb{E}(X) = 4p$. Il en va de même pour $Y \sim \mathcal{B}(4, 1-p)$, ainsi $\mathbb{E}(Y) = 4(1-p)$.
On a ici $X + Y = 4$, ainsi la valeur de X détermine complètement la valeur de Y, on a $Z = \max(X,Y) = \max(X, 4-X)$, ainsi $Z(\Omega) = \{2,3,4\}$ (car les couples possibles pour les valeurs de (X,Y) sont $(0,4)$, $(1,3)$, $(2,2)$, $(3,1)$ et $(4,0)$ qui donnent comme valeur pour Z 4,3,2,3 et 4 respectivement), ce qui permet de calculer la loi de Z.
On a $\mathbb{P}(Z=2) = \mathbb{P}(X=2) = \binom{4}{2}p^2(1-p)^2 = 6p^2(1-p)^2$, $\mathbb{P}(Z=3) = \mathbb{P}(X=1 \text{ ou } X=3) = 4p(1-p)^3 + 4p^3(1-p) = 4p(1-p)(1-2p+2p^2)$ et $\mathbb{P}(Z=4) = \mathbb{P}(X=0 \text{ ou } X=4) = p^4 + (1-p)^4$.
Z correspond au nombre de boites ouvertes.

2° la loi de X sachant $(N=n)$ est, comme au 1°, la loi $\mathcal{B}(n,p)$.

3° Pour $(k,n) \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\mathbb{P}(X=k, N=n) = \mathbb{P}(N=n)\mathbb{P}_{(N=n)}(X=k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \geq n+1 \\ \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} & \text{si } k \in [\![0,n]\!] \end{cases}$$

4° On a $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, pour $k \in \mathbb{N}$, en utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $((N=n))_{n\in\mathbb{N}}$ on a : $\mathbb{P}(X=k) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X=k, N=n) = \sum_{n=k}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k} = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{n+k}}{k!n!}p^k(1-p)^n = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{\lambda(1-p)} = \mathrm{e}^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}$.
Ainsi X suit une loi de Poisson de paramètre λp, donc $\mathbb{E}(X) = \lambda p$ et $\mathbb{V}(X) = \lambda p$.

5° Tout d'abord, en remplaçant p par $1-p$ à la question précédente on trouve $Y \sim \mathcal{P}(\lambda(1-p))$.
Pour $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$ on a d'une part : $\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=\ell) = \mathrm{e}^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{-(1-p)\lambda}\frac{((1-p)\lambda)^\ell}{\ell!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}\frac{((1-p)\lambda)^\ell}{\ell!}$.
D'autre part (en utilisant $X+Y=N$) : $\mathbb{P}(X=k, Y=\ell) = \mathbb{P}(X=k, X+Y=k+\ell) = \mathbb{P}(X=k, N=k+\ell) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!}\binom{k+\ell}{k}p^k(1-p)^{k+\ell-k}$ (car k est bien compris entre 0 et $k+\ell$). Ainsi $\mathbb{P}(X=k, Y=\ell) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!}\frac{(k+\ell)!}{k!\ell!}p^k(1-p)^\ell = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}\frac{((1-p)\lambda)^\ell}{\ell!}$.
Ainsi, pour tout k et ℓ, on a : $\mathbb{P}(X=k, Y=\ell) = \mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=\ell)$, ainsi les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

6° En utilisant la bilinéarité de la covariance et que $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ puisque X et Y sont indépendantes on trouve : $\mathrm{Cov}(X,N) = \mathrm{Cov}(X, X+Y) = \mathrm{Cov}(X,X) + \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{V}(X) + 0 = \lambda p$.

7° Soit $k \in \mathbb{N}$, on a (le maximum de deux nombres est plus petit que k si et seulement si ils le sont tous les deux) :$\mathbb{P}(Z \leq k) = \mathbb{P}((X \leq k) \cap (Y \leq k))$, par indépendance de X et Y on en déduit que $\mathbb{P}(X \leq k) = \mathbb{P}(X \leq k)\mathbb{P}(Y \leq k)$.
Or $\mathbb{P}(X \leq k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k}\mathbb{P}(X=i) = \sum_{i=0}^{k}\mathrm{e}^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^i}{i!} = \mathrm{e}^{-\lambda p}S(k,\lambda p)$. De même (en remplaçant p par $1-p$) on a $\mathbb{P}(Y \leq k) = \mathrm{e}^{-\lambda(1-p)}S(k, \lambda(1-p))$.
Ainsi $\mathbb{P}(X \leq k) = \mathrm{e}^{-\lambda}S(k,\lambda p)S(k,\lambda(1-p))$.

8° (a)
```
def S(k, x):
    res, u = 1, 1
    for j in range(1, k+1):
        u = u * x/j
        res += u
    return res
```

(b) Le commerçant est en rupture de stock si Z est strictement plus grand que 5, on doit donc calculer $\mathbb{P}(Z > 5) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 5) = \mathrm{e}^{-10}S(5,5)S(5,5)$

```
from math import exp
print(exp(-10)*S(5,5)**2)
```

Exercice 3 *(*CCP PC 2011 *Maths 2, partie I)*.

Partie I

Soit $\sum u_n$ la série de fonctions d'une variable réelle de terme général u_n défini pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{2x}{x^2 + n^2\pi^2}$

I.1.

I.1.1. Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On note $U = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ la somme de la série de fonctions $\sum u_n$.

I.1.2. Montrer que, pour tout $a > 0$, $\sum u_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.
La série $\sum u_n$ converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

I.1.3. Montrer que U est continue sur $\mathbb{R}$.

I.2.

I.2.1. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Déterminer la primitive qui s'annule en 0 de la fonction u_n.

I.2.2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ la suite de fonctions définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $v_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.
Montrer que $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

I.2.3. On note $V = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ la somme de la série de fonctions $\sum v_n$.
Montrer que V est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction U.

I.3. On considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynômes sur $\mathbb{R}$ définie par :
— pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p_0(x) = x$;
— pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $p_n(x) = x \displaystyle\prod_{k=1}^{k=n} \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.

Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, lorsque n tend vers $+\infty$, vers une fonction p que l'on exprimera à l'aide de V puis de U.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la limite donnant $p(x)$ sera alors notée : $p(x) = x \displaystyle\prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$.

Correction :

I.1.

I.1.1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $|u_n(x)| \leq \dfrac{2\,|x|}{n^2\pi^2}$. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$, il en va de même pour $\sum \frac{2|x|}{n^2\pi^2}$, ainsi $\sum u_n(x)$ converge absolument donc converge. La série de fonctions $\sum u_n$ converge donc simplement sur $\mathbb{R}$.

I.1.2. Soit $a > 0$, pour tout $x \in [-a, a]$ on a : $|u_n(x)| \leq \dfrac{2\,|x|}{n^2\pi^2} \leq \dfrac{2\,|a|}{n^2\pi^2}$. On en déduit donc que $\|u_n\|_\infty^{[-a,a]} \leq \frac{2|a|}{n^2\pi^2}$, on en déduit donc que $\sum \|u_n\|_\infty^{[-a,a]}$ converge et donc que $\sum u_n$ converge normalement.
Montrons maintenant que $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.
Méthode 1 : On remarque que le problème est en $+\infty$. On a, pour $n \in \mathbb{N}$, que $u_n(n) = \frac{2}{n(1+\pi^2)}$, comme $\|u_n\|_\infty \geq |u_n(n)|$ et comme $\sum \frac{1}{n}$ diverge on a que $\sum \|u_n\|_\infty$ diverge et donc que $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}$.
Méthode 2 : Si on ne pense pas à cette minoration on peut étudier la fonction u_n (sur $\mathbb{R}_+$ uniquement, elle est pair) pour déterminer la valeur exacte de $\|u_n\|_\infty$, on trouve que u_n est croissante jusque $n\pi$, décroissante ensuite, comme elle vaut 0 en 0 et tend vers 0 en $+\infty$, ainsi $\|u_n\|_\infty = u_n(n\pi) = \frac{1}{n\pi}$ et donc $\sum \|u_n\|_\infty$ diverge.

I.1.3. Soit $a > 0$. Toutes les fonctions u_n sont continues sur $[-a, a]$ et $\sum u_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[-a, a]$ vers U, donc U est continue sur $[-a, a]$, comme c'est vrai pour tout $a > 0$ on a que U est continue sur $\mathbb{R}$.

I.2.

I.2.1. La fonction u_n étant continue sur $\mathbb{R}$, sa primitive qui s'annule en 0 est donc, d'après le théorème fondamentale, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x u_n(t)\mathrm{d}t$, or pour $x \in \mathbb{R}$ on a : $\displaystyle\int_0^x u_n(t)\mathrm{d}t = \Big[\ln(t^2 + n^2\pi^2)\Big]_0^x = \ln(x^2 + n^2\pi^2) - \ln(n^2\pi^2) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$.

I.2.2. On a $v_n(0) = 0$, donc $\sum v_n(0)$ converge. Pour $x \neq 0$, on a $v_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{n^2\pi^2}$, donc $\sum v_n(x)$ converge absolument (donc converge). Ce qui montre bien que $\sum v_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

I.2.3. Soit $a>0$, appliquons le théorème de dérivation des séries de fonctions à $\sum v_n$ sur $[-a,a]$:
- On a v_n de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a,a]$ pour tout n ;
- On a $\sum v_n$ qui converge simplement vers V d'après la question précédente.
- Comme, pour tout n, on a $v_n'=u_n$ on a donc la convergence normale sur $[-a,a]$ de $\sum v_n'$ vers U d'après la question I.1.2.

Ainsi V est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a,a]$ et $V'=U$. Ceci étant vrai pour tout $a>0$, et comme $V(0)=0$ on a bien que V est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction U.

I.3. Tous les fonctions p_n sont impaires, on va donc les étudier sur $\mathbb{R}_+$. Soit $x\in\mathbb{R}^\star$. Pour $n\in\mathbb{N}$, on a : $\ln(p_n(x))=\ln\left(x\prod_{k=1}^{k=n}\left(1+\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\right)=\ln(x)+\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)=\ln(x)+\sum_{k=1}^{n}v_k(x)$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty}\ln(p_n(x))=\ln(x)+V(x)$. Ainsi, par continuité de la fonction exp, on a : $\lim_{n\to+\infty}p_n(x)=x\mathrm{e}^{V(x)}$, cette limite reste vrai pour $x=0$ (et pour les négatifs puisque V est paire). On a donc montré la convergence simple de (p_n) vers p sur $\mathbb{R}$, et que pour $x\in\mathbb{R}$, $p(x)=x\mathrm{e}^{V(X)}=x\exp\left(\int_0^x U(t)\mathrm{d}t\right)$.

Exercice 4 *(Fonction zeta de Riemann, exercice 1* E3A PC 2017 *Maths 1)***.**

On considère la fonction ζ de la variable réelle x définie par la relation $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$ lorsque cette notation a un sens.

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^\star$, on considère la fonction f_n définie sur $]1;\ +\infty[$ par : $\forall x\in]1;\ +\infty[,\ f_n(x)=\frac{1}{n^x}$

1° Déterminer l'ensemble de définition de la fonction ζ.

2° Soit $a\in]1;\ +\infty[$. Montrer que la fonction ζ est continue sur l'intervalle $[a;\ +\infty[$.
Que peut-on en déduire pour la continuité de la fonction ζ ?

3° Soit $n\in\mathbb{N}^\star$.

(a) Montrer que : $\forall k\in\mathbb{N}^\star,\ \forall x\in]1;\ +\infty[,\ f_n^{(k)}(x)=\frac{(-\ln(n))^k}{n^x}$.

(b) Montrer que la fonction ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1;\ +\infty[$ et donner l'expression de $\zeta^{(k)}(x)$ pour tout $k\in\mathbb{N}^\star$ et tout $x\in]1;\ +\infty[$ sous forme d'une série.

4° Préciser le sens de variation de ζ.

5° On se propose dans cette question de justifier l'existence et de déterminer la valeur de la limite de la fonction ζ en $+\infty$.

(a) Montrer que ζ possède une limite finie en $+\infty$.

(b) Soit $N\in\mathbb{N}^\star$. Montrer que : $\forall x\geq 2,\ 1\leq\zeta(x)\leq\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}+\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

(c) En déduire la valeur de la limite de ζ en $+\infty$.

6° On considère à présent $h\in]0;\ +\infty[$.
À l'aide d'une comparaison série-intégrale, déterminer un encadrement de $\zeta(1+h)$ puis un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1.

7° Donner l'allure de la représentation graphique de la fonction ζ.

8° On pose : $\forall x\in]0;\ +\infty[,\ F(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$.

(a) Justifier que F est bien définie.

(b) Monter que F est continue sur $\mathbb{R}_+^\star$.

(c) Montrer que : $\forall x\in]1;\ +\infty[,\ \zeta(x)+F(x)=2^{1-x}\zeta(x)$.

(d) Déterminer ensuite la limite de F en $+\infty$.

Correction :

1° On sait que la série de Riemann $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha>1$, ainsi l'ensemble de définition de la fonction ζ est $]1;\ +\infty[$.

2° Soit $a \in]1;\ +\infty[$. On a alors, pour tout entier $n \geq 1$ et pour tout réel $x \geq a$, que : $0 < \frac{1}{n^x} \leq \frac{1}{n^a}$, on a donc $\|f_n\|_\infty^{[a,+\infty[} \leq \frac{1}{n^a}$, comme la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^a}$ converge, ainsi (par théorème de comparaison des SATP), la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur $[a;\ +\infty[$. Comme, de plus, toutes les fonctions f_n sont continues sur $[a, +\infty[$, la fonction ζ est alors continue sur l'intervalle $[a;\ +\infty[$.
Comme a est quelconque dans $]1;\ +\infty[$, on en déduit la continuité de la fonction ζ sur $]1;\ +\infty[$.

3° (a) La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et par récurrence immédiate (la rédiger pour ne pas prendre de risque) sur $k \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star,\ \forall x \in]1;\ +\infty[,\ f_n^{(k)}(x) = \frac{\left(-\ln(n)\right)^k}{n^x}.$$

(b) Soit $a \in]1;\ +\infty[$.
On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, pour tout entier $n \geq 1$, pour tout réel $x \geq 1$: $\left|f_n^{(k)}(x)\right| \leq \frac{(\ln(n))^k}{n^a}$, on a donc $\|f_n^{(k)}\|_\infty^{[a;+\infty[} \leq \frac{(\ln(n))^k}{n^a}$, comme de plus $\frac{(\ln(n))^k}{n^a} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{(a+1)/2}}\right)$ et que $\sum \frac{1}{n^{(a+1)/2}}$ converge (car $(a+1)/2 > 1$), on a que $\sum f_n(k)$ converge normalement (donc uniformément) sur $[a; +\infty[$.
On a donc bien toutes les hypothèses pour appliquer le théorème de dérivation terme à terme, on a donc ζ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a;\ +\infty[$, comme a est quelconque elle l'est donc sur $]1;\ +\infty[$, de plus on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$ et pour tout $x > 1$ que : $\zeta^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(-\ln(n)\right)^k}{n^x}$.

4° Pour tout $x > 1$ on a : $\zeta'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{\ln(n)}{n^x} < 0$. Ce qui montre que la fonction ζ est décroissante.

5° (a) La fonction ζ est positive (donc minorée), de plus elle est décroissante, elle est possède donc une limite finie en $+\infty$.

(b) Soit $N \in \mathbb{N}^\star$ et $x \geq 2$.
Le premier terme de la somme qui défini $\zeta(x)$ est 1 et tous les autres sont positifs, on a donc $\zeta(x) \geq 1$.
De plus on a : $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
On a donc bien l'encadrement escompté.

(c) Soit $\varepsilon > 0$.
Pour tout $x \geq 2$ et pour tout $N \geq 1$, on a $0 \leq \zeta(x) - 1 \leq \displaystyle\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^x} + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Comme $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (reste d'une série convergente), il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $N \geq N_0$: $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On fixe dorénavant $N = N_0$. Comme $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (c'est une somme finie), il existe $A \geq 2$ tel que pour tout $x \geq A$ on a $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On a donc pour tout $x \geq A$ que : $0 \leq \zeta(x) - 1 \leq \varepsilon$, ce qui montre bien la convergence de ζ vers 1 en $+\infty$.
Alternative : On peut le faire sans ε, en effet on sait déjà que ζ converge en $+\infty$, on peut donc faire tendre x vers $+\infty$ dans l'encadrement de la question précédente, on a (la première somme est finie et converge vers 1) alors : $1 \leq \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) \leq 1 + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, ceci étant vrai pour tout $N \geq 1$, il ne reste plus qu'a faire tendre N vers $+\infty$ pour pouvoir conclure (la somme étant le reste d'une série convergente, elle converge donc vers 0) que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$.

6° Soit $h > 0$.
Pour $N > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour tout $t \in [n, n+1]$: $\frac{1}{(n+1)^{1+h}} \leq \frac{1}{t^{1+h}} \leq \frac{1}{n^{1+h}}$.
On intègre pour t entre n et $n+1$: $\displaystyle\frac{1}{(n+1)^{1+h}} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^{1+h}}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n^{1+h}}$.
On somme pour n entre 1 et N : $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^{1+h}} \leq \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{1}{t^{1+h}}\mathrm{d}t \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1+h}}$. Or $\displaystyle\int_1^{N+1} \frac{1}{t^{1+h}}\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{ht^h}\right]_1^{N+1} = \frac{1}{h} - \frac{1}{h(N+1)}$. On a donc comme inégalité : $\displaystyle\sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n^{1+h}} \leq \frac{1}{h} - \frac{1}{h(N+1)} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^{1+h}}$.

On peut faire tendre N vers $+\infty$ (tout le monde converge) et obtenir : $\zeta(1+h)-1 \leq \dfrac{1}{h} \leq \zeta(1+h)$.
Ce qui implique $\frac{1}{h} \leq \zeta(1+h) \leq 1+\frac{1}{h}$, ainsi (car $h>0$) : $1 \leq h\zeta(1+h) \leq h+1$, ce qui montre (théorème d'encadrement) que $\lim\limits_{h\to 0} h\zeta(1+h)=1$, ie $\zeta(1+h) \underset{h\to 0}{\sim} \frac{1}{h}$, dit autrement : $\zeta(x) = \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{x-1}$.

7° Allure de la représentation graphique de ζ : Décroissante, asymptote verticale d'équation $x=1$ et asymptote horizontale d'équation $y=1$. La tracer.

8° (a) Pour $x>0$, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ est convergente, en effet elle converge absolument pour $x>1$ et pour $x>0$ c'est une série alternée qui relève du théorème spécial des séries alternées (TSA), en effet $\left(\frac{1}{n^x}\right)_{n\geq 1}$ est bien décroissante et tend vers 0. Ainsi F est bien définie.

(b) De plus, la TSA, donne aussi une majoration du reste d'ordre n, ie : pour pour tout $x>0$ et pour tout $n\geq 1$ on a $|R_n(x)| = \left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}\right| \leq \frac{1}{(n+1)^x}$.
Ainsi pour $a>0$, $n\in\mathbb{N}^\star$ et pour tout $x\geq a$ on a $\|R_n\|_\infty^{[a,+\infty[} \leq \frac{1}{(n+1)^a}$, ainsi (R_n) converge uniformément sur $[a;+\infty[$ vers la fonction nulle. Dit autrement $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^x}$ converge uniformément, comme c'est une somme de fonctions continues sur $]0;+\infty[$, on a donc que F est continue sur $[a;+\infty[$, donc (comme a est quelconque) sur $]0;+\infty[$.

(c) Soit $x>1$. On a : $\zeta(x)+F(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1+(-1)^n}{n^x} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{2}{(2p)^x} = 2^{1-x}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^x} = 2^{1-x}\zeta(x)$.

(d) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\zeta(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}2^{1-x}=0$, on en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=-1$.

Exercice 5 *(*E3A PC 2020 *Ex 1)***.**
Soit $a\in\mathbb{R}$ et la matrice $M_a = \begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

1° Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

2° Pour quelles valeurs du réel a la matrice M_a est-elle inversible ?

3° Montrer que lorsqu'elle n'est pas diagonalisable, M_a est semblable à la matrice $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Correction :

1° On a $\chi_{M_a} = \begin{vmatrix}X-1 & -a & 0\\ 0 & X & -1\\ 0 & -1 & X\end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix}X & -1\\ -1 & X\end{vmatrix} = (X-1)(X^2-1) = (X-1)^2(X+1)$. Ainsi 1 est valeur propre double et -1 est valeur propre simple de M_a.
On a ainsi que M_a est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_1(A))=2$. On a $M_a - I_3 = \begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, séparons en deux cas :
Si $a=0$, alors cette matrice est de rang 1 et donc (d'après le théorème du rang) $\dim(E_1(A))=2$, on a donc M_0 diagonalisable.
Si $a\neq 0$, alors $\mathrm{rg}(M_a-I_3)=2$, ainsi (toujours d'après le théorème du rang), $\dim(E_1(A))=1$, on a donc que M_a n'est pas diagonalisable.
En conclusion : M_a est diagonalisable si et seulement si $a=0$

2° 0 n'est jamais valeur propre de M_a donc M_a est inversible pour tout $a\in\mathbb{R}$.

3° On suppose donc $a\neq 0$, et notons f_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à M_a.
Comme -1 est valeur propre simple, on a $\dim(E_{-1}(f_a))=1$, de plus On a : $M_a+I_3 = \begin{pmatrix}2 & a & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, comme $aC_1 - 2C_2 + 2C_3 = 0$ (on peut aussi résoudre un système) on pose $e_1 = (a,-2,2)$ et on a $f_a(e_1) = -e_1$. On a $\dim(E_1(f_a))=1$, et clairement $e_2=(1,0,0)$ est tel que $f_a(e_2)=e_2$.

Il reste donc à trouver $e_3 = (x, y, z)$ tel que (e_1, e_2, e_3) soit une base de $\mathbb{R}^3$ et tel que $f_a(e_3) = e_2 + e_3$.

On doit donc avoir $\begin{cases} x + ay & = 1 + x \\ z & = y \\ y & = z \end{cases} \iff \begin{cases} ay & = 1 \\ -y + z & = 0 \\ y - z & = 0 \end{cases}$.

On pose donc $e_3 = (0, 1/a, 1/a)$, on a bien $f_a(e_3) = e_2 + e_3$, il ne reste plus qu'à montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, le plus rapide est de considérer la matrice $P = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1/a \\ 2 & 0 & 1/a \end{pmatrix}$. En développant par rapport à la deuxième colonne on a $\det(P) = -4/a$ ainsi (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$, ainsi M_a est semblable à $T = \text{Mat}_{(e_1,e_2,e_3)}(f_a) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.