DNS 8 : pour le mardi 4 février

Le candidat encadrera ou soulignera les résultats.
N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Correction

Exercice 1 *(CCP MP 2017, Maths 1, problème : séries trigonométriques).*

Remarque : On admettra (pour la question 16°) que : $\forall x \in]-1,1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$.

Il est utile en physique, notamment pour étudier des spectres d'énergie ou pour décomposer un signal périodique en harmoniques, de pouvoir écrire une fonction périodique en somme d'une série de fonctions trigonométriques.

Nous allons nous intéresser à l'aspect mathématique de cette décomposition pour les fonctions de période 2π.

Dans ce qui suit, on appelle "série trigonométrique" une série de fonctions du type

$$\sum(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) \text{ où } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont deux suites de réels.}$$

Dans la première partie, on étudie quelques exemples. Dans la deuxième partie, on s'intéresse plus particulièrement aux séries trigonométriques qui convergent normalement sur $\mathbb{R}$.

On notera $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in C_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, on notera

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \quad \text{et} \quad \beta_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

Partie 1 : exemples

1° Démontrer que la série trigonométrique $\sum\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier $p \geq 2$, déterminer la somme de la série $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n$ puis en déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)$ (il n'est pas utile de réduire au même dénominateur).

2° Ecrire la fonction $\varphi : x \mapsto \exp(\cos(x))\cos(\sin(x))$ comme la somme d'une série trigonométrique. On pourra écrire la fonction $x \mapsto \exp(e^{ix})$ comme somme de série de fonctions.

3° Donner un exemple de suite (a_n) de limite nulle telle que la série trigonométrique $\sum a_n\cos(nx)$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.

4° On admet que la série trigonométrique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

Correction :

1° On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right| \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Le majorant ne dépend pas de x et $\sum\frac{1}{2^n}$ est une série convergente. Ainsi la série de fonctions est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.
Tout d'abord on remarque que $\left|\frac{e^{ix}}{p}\right| = \frac{1}{p} < 1$, ainsi $\sum\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n$ est une série géométrique convergente. De plus on a : $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{e^{ix}}{p}} = \frac{p}{p-e^{ix}}$. En passant aux parties réelle et imaginaire, on a donc : $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{p^n} = \frac{p^2 - p\cos(x)}{p^2 - 2p\cos(x) + 1}$ et $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{p^n} = \frac{p\sin(x)}{p^2-2p\cos(x)+1}$.

Il ne reste plus qu'à combiner les résultats pour $p = 2$ et $p = 3$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right) = \frac{4-2\cos(x)}{5-4\cos(x)} + \frac{3\sin(x)}{10-6\cos(x)}$.

2° On a : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(e^{ix}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n!}$. Or, $\exp(e^{ix}) = \exp(\cos(x))\exp(i\sin(x))$ et la partie réelle de cette quantité est : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(\cos(x))\cos(\sin(x)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n!}$.

3° Posons $a_n = \frac{1}{n+1}$ et $u_n(x) = a_n\cos(nx)$. (a_n) est de limite nulle mais $u_n(0) = \frac{1}{n+1}$ est le terme général d'une série divergente. $\sum u_n$ n'est donc pas simplement convergente sur $\mathbb{R}$.

4° Posons $f_n : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ avec égalité pour $x = \frac{\pi}{2n}$. Ainsi $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{n}}$, la série $\sum f_n$ ne converge donc pas normalement sur $\mathbb{R}$.

Partie 2 : propriétés

Une condition suffisante

5° Démontrer que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Correction :

5° Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $|a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)| \leq |a_n| + |b_n|$. Le majorant ne dépend pas de x et est le terme général d'une série convergente (par hypothèse). La série de fonctions est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire

6° Soient $a, b \in \mathbb{R}$ quelconques. Démontrer que le maximum de la fonction $x \mapsto |a\cos(x) + b\sin(x)|$ est $\sqrt{a^2+b^2}$.

7° Démontrer que si la série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0 et les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.

Correction :

6° Posons $f : x \mapsto |a\cos(x) + b\sin(x)|$. Tout d'abord on remarque que si $a = b = 0$ alors $f = 0$ et donc f admet un maximum en $\sqrt{a^2+b^2} = 0$, supposons dorénavant que $(a, b) \neq (0, 0)$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(x)\right|$. Notons $A = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $B = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, comme $A^2 + B^2 = 1$, on en déduit qu'il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $A = \cos(\varphi)$ et $B = \sin(\varphi)$. On a donc, pour $x \in \mathbb{R}$, que $f(x) = \sqrt{a^2+b^2}\,|\cos(\varphi)\cos(x) + \sin(\varphi)\sin(x)| = \sqrt{a^2+b^2}|\cos(x-\varphi)| \leq \sqrt{a^2+b^2}$. Ainsi $\sqrt{a^2+b^2}$ est un majorant de f, or il est atteint pour $x = \varphi$, c'est donc le maximum de la fonction f.

7° Posons $u_n(x) = a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$. On a d'après la question précédente $\|u_n\|_\infty = \sqrt{a_n^2+b_n^2}$, ainsi (par hypothèse) $\sum\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ converge. Or pour tout n on a $|a_n| \leq \sqrt{a_n2+b_n^2}$ et $|b_n| \leq \sqrt{a_n^2+b_n^2}$, d'où la convergence absolue de $\sum a_n$ et de $\sum b_n$. Ce qui implique en particulier que (a_n) et (b_n) convergent vers 0.

Autres propriétés

8° On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$. Justifier que $f \in C_{2\pi}$.

9° Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\,dx$ pour $n \neq 0$ et donner la valeur de $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)\,dx$ pour k et n entiers.

10° On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$: pour tout réel x, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx))$. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\alpha_n(f) = a_n$ puis exprimer $\alpha_0(f)$ en fonction de a_0. On pourra utiliser sans démonstration que pour $k \neq n$, $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)\,dx =$

0.
On admettra, pour la suite du problème, que pour tout entier naturel n non nul $\beta_n(f) = b_n$ et $\beta_0(f) = 0$ (la démonstration n'est pas demandée).

11° Soit $f \in C_{2\pi}$. Pour tout réel x, on pose $u_0(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = \alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx)$. On suppose ici que la série trigonométrique $\sum(u_n(x))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction notée g :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha_k(f)\cos(kx) + \beta_k(f)\sin(kx))$$

Quelles relations a-t-on dans ce cas entre $\alpha_n(g)$ et $\alpha_n(f)$? $\beta_n(g)$ et $\beta_n(f)$?

12° Il est admis que si une fonction $h \in C_{2\pi}$ vérifie : pour tout entier naturel n, $\alpha_n(h) = \beta_n(h) = 0$, alors h est la fonction nulle. Démontrer que pour tout réel x, $g(x) = f(x)$.
En résumé, lorsque la série trigonométrique $\sum(\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx))$ d'une fonction $f \in C_{2\pi}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ alors pour tout réel x, on a

$$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx))$$

13° Si $f \in C_{2\pi}$ est une fonction paire, que vaut $\beta_n(f)$? Exprimer, sans démonstration, $\alpha_n(f)$ en fonction de l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx$.

14° Exemple. Soit $f \in C_{2\pi}$ définie ainsi : pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = x^2$ et f est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Construire la courbe de cette fonction paire f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$ puis déterminer, pour tout entier naturel, les coefficients $\alpha_n(f)$ et $\beta_n(f)$. Donner une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.

15° En déduire les sommes $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$. Déduire alors de la seconde somme la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

16° Application. Justifier que la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1[$ puis démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12}$.

17° La somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ est-elle nécessairement une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$?
Proposer une condition suffisante sur les séries $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ pour que la somme de la série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$, qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ soit une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

18° Déterminer la somme de la série trigonométrique $\displaystyle\sum \frac{n}{3^n}\cos(nx)$.

Correction :

8° Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ posons $f_n(x) = a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$. Toutes les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$, de plus $\sum f_n$ converge normalement vers f sur $\mathbb{R}$, ainsi f est continue sur $\mathbb{R}$ (car la convergence normale implique la convergence uniforme). De plus les fonctions f_n sont toutes 2π-périodique, on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\sum_{k=0}^n f_k(x + 2\pi) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$, ainsi en prenant la limite quand n tend vers $+\infty$ on a $f(x + 2\pi) = f(x)$. D'où f est 2π-périodique. On a donc montré que : $f \in C_{2\pi}$.

9° Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ on a : $\cos^2(nx) = \frac{1}{2}(\cos(2nx) + 1)$. Ainsi, pour $n \geq 1$, on a $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\,dx = \left[\frac{1}{4n}\sin(2nx) + \frac{x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \sin(kx)\cos(nx)$ est impaire et on l'intègre sur un intervalle centré en 0, ainsi $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)\,dx = 0$.

10° Posons $f_k : x \mapsto a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)$. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on a $\alpha_n(f) = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)\cos(nx)\ dx$. On a pour tout x, $|f_k(x)\cos(nx)| \leq |f_k(x)| \leq \|f_k\|_\infty$, ainsi la série converge normalement (donc uniformément) sur le **segment** $[-\pi, \pi]$. On est dans le cas où on peut intervertir : $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)\,dx + b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx))\,dx\right)$.
Dans la somme, tous les termes sont nuls sauf celui d'indice $k = n$ qui vaut $a_n\pi$ si $n \neq 0$ (question précédente et résultat admis) et $2\pi a_0$ si $n = 0$. Ainsi, $\forall n \neq 0,\ a_n = \alpha_n(f)$ et $a_0 = \dfrac{1}{2}\alpha_0(f)$.

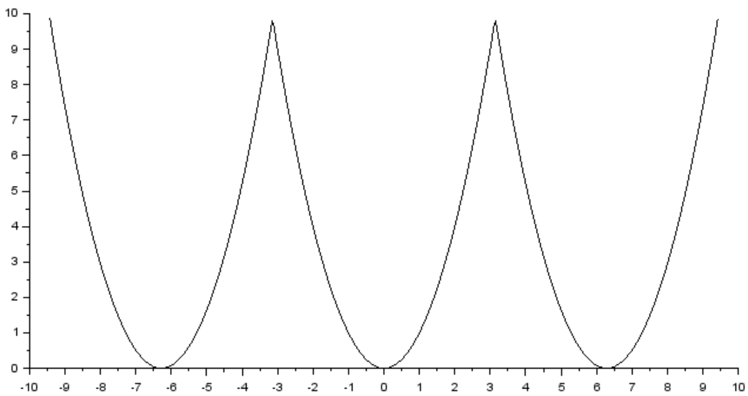
11° Il s'agit d'utiliser la question précédente avec $a_0 = \alpha_0(f)/2$, $b_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $a_n = \alpha_n(f)$ et $b_n = \beta_n(f)$. La somme est ici égale à g et on obtient donc : $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n(f) = \alpha_n(g)\ \beta_n(f) = \beta_n(g)$.

12° $h \mapsto \alpha_n(h)$ et $h \mapsto \beta_n(h)$ étant linéaire, on a ici $\alpha_n(g-f) = \beta_n(g-f) = 0$ et, avec le résultat admis $g - f = 0$.

13° Si f est paire, $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ est impaire et sa fonction est donc d'intégrale nulle sur un intervalle centré sur 0 (ce que l'on voit par le changement de variable affine $t = -x$). En particulier, $\forall n,\ \beta_n(f) = 0$.

$x \mapsto f(x)\cos(nx)$ est paire et $\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx$.

14°



La fonction f étant paire, les coeffcients $\beta_n(f)$ sont tous nuls. De plus $\alpha_n(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x^2\cos(nx)\ dx$.

Une double intégration par parties donne, pour $n \neq 0$, $\displaystyle\int_0^\pi x^2\cos(nx)\ dx = -\frac{2}{n}\int_0^\pi x\sin(nx)\ dx = -\frac{2}{n}\left(\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nx)\,dx\right)$ et ainsi $\forall n \neq 0,\ \alpha_n(f) = \dfrac{4(-1)^n}{n^2}$. On a aussi $\alpha_0(f) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x^2\ dx = \frac{2}{3}\pi^2$.

Comme $\sum(\alpha_n(f))$ et $\sum(\beta_n(f))$ convergent absolument, on peut utiliser ce qui précède et conclure : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$ la série étant normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

15° Pour $x = 0$, on obtient :$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$. Pour $x = \pi$, on obtient : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On découpe la somme en isolant les termes d'indice pair et ceux d'indice impair (c'est licite car la série est absolument convergente) : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$. On en déduit que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$.

16° $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est continue sur $]0,1]$. En 0, la fonction est équivalente à $\frac{x}{x} = 1$ et est donc prolongeable par continuité. Notre fonction est donc intégrable sur $[0,1]$ (c'est une intégrale faussement généralisée).

Utilisons le DSE de $x \mapsto \ln(1+x)$: $\forall x\ \in]0,1[$, $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}$. On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\ dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}\ dx$. On veut intervertir somme et intégrale. On va utiliser le théorème d'intégration terme à terme :

- $g_n\ :\ x \mapsto (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}$ est le terme général d'une série de fonctions continue qui converge simplement sur $]0,1[$ vers $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ qui est intégrable.
- La somme simple est continue sur $]0,1[$.
- g_n est intégrable sur $]0,1[$ et $\int_0^1 |g_n(x)|\ dx = \frac{1}{n^2}$ est le terme générale d'une série convergente.

L'interversion est licite et donne : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\ dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}\ dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

17° Dans l'exemple de la question 14°, on a obtenu une série normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Cependant la somme f n'est pas dérivable. En effet, f est dérivable à droite et gauche en π avec des nombres dérivés 2π (à gauche)

et -2π (à droite).
Supposons que $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ sont des séries absolument convergente. Montrons qu'alors en posant $u_n(x) = a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$, $\sum(u_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On utilise pour cela le théorème de dérivation (version $\mathcal{C}^1$ des sommes de séries fonctions.
- $\forall n,\ u_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et pour tout x, $u_n'(x) = -na_n\sin(nx) + nb_n\cos(nx)$.
- $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- $\|u_n'\|_\infty \leq |na_n| + |nb_n|$ est le terme général d'une série convergente et $\sum u_n'$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Le théorème s'applique donc et indique non seulement que la somme est de classe $\mathcal{C}^1$ mais que sa dérivée est la somme de la série dérivée.

18° On a vu en question 1° que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{3^n} = \frac{3\sin(x)}{10-6\cos(x)}$. On est dans le cadre de la condition précédente avec $a_n = 0$ et $b_n = 1/3^n$. On en déduit (en dérivant) que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\cos(nx)}{3^n} = \frac{3}{2}\frac{5\cos(x)-3}{(5-3\cos(x))^2}$.

Exercice 2 *(Une intégrale à paramètre)*.
On considère la fonction pour $\alpha > 1$, $f : x \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{(x^2+t^2)^\alpha}\mathsf{d}t$.

1° Déterminer le domaine de définition D de f.

2° Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et donner f'.

Correction : Pour $(x,t) \in \mathbb{R}\times]1,+\infty[$ on note $g(x,t) = \frac{1}{(x^2+t^2)^\alpha}$.

1° À $x \in \mathbb{R}$ fixé la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est cpm sur $[1,+\infty[$, pour $t > 1$ on a $|g(x,t)| \leq \frac{1}{t^{2\alpha}}$, d'où la convergence absolue, ainsi f est définie sur $D = \mathbb{R}$.

2° Soit $A > 0$. À $t \geq 1$ fixé, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-A,A]$ et pour $(x,t) \in [-A,A]\times]1,+\infty[$ on a $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{-2\alpha x}{(t^2+x^2)^{\alpha+1}}$. À $x \in [-A,A]$ fixé la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est cpm et intégrable sur $[1,+\infty[$ d'après 1°. À x fixé $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est cpm, et pour $(x,t) \in [-A,A]\times]1,+\infty[$ on a $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{2\alpha A}{t^{2(\alpha+1)}} = \varphi_A(t)$ cette dernière est bien cpm et intégrable, d'où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-A,A]$, A étant quelconque, elle l'est donc sur $\mathbb{R}$.De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{-2\alpha x}{(t^2+x^2)^{\alpha+1}}\mathsf{d}t$.