Concours Blanc « e3a-ccinp » Pc-Psi

Composition de Mathématiques
Durée 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
Aucun document autorisé ; calculatrice et tout matériel électronique interdits

Exercice 1
La constante d'Euler

Présentation générale

Dans cet exercice, on commence dans la première partie par démontrer la convergence d'une suite afin de définir la constante d'Euler comme sa limite. Dans la seconde partie, on détermine une expression de cette constante sous la forme d'une intégrale.

Partie I – Construction de la constante d'Euler

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$$

et on considère la suite $(\Delta_n)_{n\geq 2}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \Delta_n = u_n - u_{n-1}\,.$$

Q1. Déterminer un nombre $a \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $\Delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{a}{n^2}$.

Q2. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 2} \Delta_n$ est convergente.

Q3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente.

Partie II – Expression intégrale de la constante d'Euler

Dans **Q3**, on a montré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers un nombre réel que l'on note γ dans la suite de l'exercice. Ce dernier est appelé constante d'Euler. Dans cette partie, on détermine une expression de γ sous la forme d'une intégrale.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère la fonction $f_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad f_n(t) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n \ln(t) & \text{si } t < n \\ 0 & \text{si } t \geq n \end{cases}.$$

II.1 – Propriétés de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$

Dans cette sous-partie, on pourra utiliser librement l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$ valable pour tout $x \in]-1,+\infty[$.

Q4. Soit $t \in]0,+\infty[$. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ vérifiant $n \geq n_0$, on a :

$$f_n(t) = \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\,.$$

Q5. Déduire de la question précédente que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln(t)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Q6. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que pour tout $t \in]0,+\infty[$, on a $|f_n(t)| \leq \mathrm{e}^{-t}|\ln(t)|$.

Q7. Montrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln(t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.

II.2 – Convergence d'une suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 u^n \ln(1-u)\,\mathrm{d}u\,.$$

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^\star$.

Q8. Montrer que l'intégrale I_n est convergente.

Q9. Déduire des résultats de la sous-partie **II.1** que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente et que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t\,.$$

Q10. Montrer que l'intégrale J_n est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\,\mathrm{d}u$$

est convergente. En déduire que l'intégrale J_n est convergente et que l'on a les égalités :

$$J_n = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{u^{n+1}-1}{u-1}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\,.$$

Q11. Montrer que l'on a la relation :

$$I_n = \frac{n}{n+1}\ln(n) + nJ_n\,.$$

Q12. Déduire des questions précédentes que :

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t\,.$$

Exercice 2
Transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal

Pour $x > 0$, on note :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t, \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\sin(t)\mathrm{d}t \text{ et } H(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\cos(t)\mathrm{d}t.$$

Q1. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ |\sin(t)| \leq t$.

Q2. Montrer que les fonctions F, G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$.

Q3. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

Q4. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer F' à l'aide de la fonction G.

Q5. Trouver une expression simple pour G et pour H. *On pourra calculer $H(x) + iG(x)$.*
En déduire, pour $\alpha \in]0, +\infty[$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\cos(\alpha t)\mathrm{d}t$.

Q6. En déduire une expression simple pour F. Que vaut $F(1)$?

Exercice 3

Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique.
Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose :

$$\langle P|Q\rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1).$$

Q1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

Q2. Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.

Q3. Déterminer la distance du polynôme $U = X^2 - 4$ à $\mathbb{R}_1[X]$.

Q4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = 0$.

Q4.1 Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E. Quelle est sa dimension ?

Q4.2 Soit φ la projection orthogonale sur H. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4
Étude d'un endomorphisme sur un espace de polynômes

Présentation générale

On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes : si $U \in \mathbb{C}[X]$ et $V \in \mathbb{C}[X]$ sont deux polynômes avec $V \neq 0$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que :

$$U = VQ + R \quad \text{avec} \quad (R = 0 \quad \text{ou} \quad \deg(R) < \deg(V)) \ .$$

Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le quotient et le reste dans la division euclidienne du polynôme U par V.
Dans cet exercice, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ et un couple $(A, B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(B) = n + 1$. On considère également l'application φ définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui à un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de AP par B.
Par exemple, si on suppose que l'on a :

$$n = 2, \quad A = X^2, \quad B = X^3 - X, \quad P = X^2 + X + 1,$$

alors, en effectuant la division euclidienne de AP par B, on obtient :

$$AP = X^4 + X^3 + X^2 = BQ + R \quad \text{avec} \quad Q = X + 1 \quad \text{et} \quad R = 2X^2 + X \,,$$

donc on a $\varphi(P) = 2X^2 + X$.

Partie I – Généralités sur l'application φ

Dans cette partie, on démontre que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q1. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

On considère deux polynômes $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$. Par le théorème de la division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tels que :

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = BQ_2 + R_2 \,.$$

Q2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B en fonction de λ et des polynômes Q_1, Q_2, R_1 et R_2 en justifiant votre réponse. En déduire que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.

Partie II – Étude d'un premier exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que :

$$n = 2, \quad A = X^2 + 2X \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 - X - 1 \,.$$

Q3. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \,.$$

Q4. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice M.

Q5. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable. Déterminer une base de $\mathbb{C}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ.

Partie III – Étude d'un second exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$ et que $B = X^3$. Comme A est un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_2[X]$, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.

Q6. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \,.$$

Q7. Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable si et seulement si le polynôme A est constant.

Partie IV – Étude du cas où B est scindé à racines simples

Dans cette partie, on ne suppose plus que $n = 2$: le nombre n est un entier quelconque de $\mathbb{N}^\star$. Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que B est un polynôme scindé à racines simples. On note $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ les racines de B qui sont donc des nombres complexes distincts.
On définit les polynômes de Lagrange $L_0, \dots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$ associés aux points $x_0, \dots, x_n$ par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}.$$

En particulier, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\forall (k, j) \in [\![0, n]\!]^2, \quad L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = k \\ 0 & \text{si} \quad j \neq k \end{cases}.$$

IV.1 – Décomposition avec les polynômes de Lagrange

Q8. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $x_0, \dots, x_n$ sont des racines du polynôme $D = P - \sum_{i=0}^{n} P(x_i)L_i$.

Q9. Déduire de la question précédente que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i)L_i$.

Q10. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

IV.2 – Réduction de l'endomorphisme φ

Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ et $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de AL_k par B.

Q11. Soit $(j, k) \in [\![0, n]\!]^2$. Montrer que $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$ et que $R_k(x_k) = A(x_k)$.

Q12. En utilisant **Q9**, en déduire pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ que $\varphi(L_k) = A(x_k)L_k$.

Q13. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

Exercice 5

Q1. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq I_n$ et $M \neq \frac{1}{2}I_n$, vérifiant la relation :

$$2M^2 = 3M - I_n.$$

- **Q1.1** On note $F = \mathrm{Vect}(I_n, M, M^2)$. Prouver que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k \in F$.
  Déterminer la dimension de F et en donner une base.
- **Q1.2** Vérifier que F est stable pour la multiplication des matrices.
- **Q1.3** Soient $A = M - I_n$ et $B = M - \frac{1}{2}I_n$.
  Justifier que $\mathcal{B} = (A, B)$ constitue une base de F.
  Déterminer les composantes des matrices AB, BA, A^2 et B^2 dans la base $\mathcal{B}$.
- **Q1.4** Déterminer toutes les matrices T de F vérifiant $T^2 = M$.

Q2. Soit X une variable aléatoire réelle telle que l'on a :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad 2\mathbb{P}(X = n + 2) = 3\mathbb{P}(X = n + 1) - \mathbb{P}(X = n).$$

- **Q2.1** On note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$. Exprimer p_n en fonction de n.
  En déduire la loi de la variable aléatoire X.
- **Q2.2** Justifier que la variable aléatoire X possède une espérance et une variance et les calculer.
  On pourra admettre que si $q \in]-1, 1[$, alors $\sum nq^{n-1}$ converge et que $\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \dfrac{1}{(1-q)^2}$, et que $\sum n(n-1)q^{n-2}$ converge aussi et que $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \dfrac{2}{(1-q)^3}$.