Concours Blanc « Mines-Centrale » Pc-Psi

Composition de Mathématiques
Durée 4 heures

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Aucun document autorisé ; calculatrice et tout matériel électronique interdits

Problème 1
Transformations intégrale

Ce problème aborde l'étude de deux transformations intégrales utilisées pour le traitement des signaux analogiques : la transformation de Fourier et celle de Laplace. Chacune d'elles permet de modéliser le comportement fréquentiel d'un signal. La partie I étudie quelques propriétés de la transformée de Fourier d'un signal analogique continu par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. La partie II aboutit à la formule d'inversion de Fourier qui permet de retrouver un signal à partir de sa transformée de Fourier. La partie VI utilise un résultat classique de probabilité pour démontrer l'injectivité de la transformation de Laplace sur l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ et nulles hors d'un segment.

On note

- E_{cpm} le $\mathbb{C}$ espace vectoriel des fonctions $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{S}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^k f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Partie I –Transformation de Fourier

Pour toute fonction $f \in E_{cpm}$, on considère la fonction $\mathcal{F}(f)$ (*transformée de Fourier de* f) définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} t\xi}\, \mathrm{d}t$$

I.A On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Justifier que φ appartient à E_{cpm} et calculer sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(\varphi)$.

I.B On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \psi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad \text{et} \quad \psi(0) = 1$$

I.B.1 Montrer que ψ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

I.B.2 Prouver

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_n^{n+1} |\psi(x)|\, \mathrm{d}x \geq \frac{2}{\pi^2(n+1)}$$

En déduire que ψ n'appartient pas à E_{cpm}.

I.C Soit $f \in E_{cpm}$. montrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

I.D Soit $f \in \mathcal{S}$.

I.D.1 Justifier que, pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

I.D.2 Démontrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \xi \in \mathbb{R},\ (\mathcal{F}(f))^{(n)}(\xi) = (-2\mathrm{i}\pi)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)\mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i} t\xi}\, \mathrm{d}t$$

I.E On considère la fonction $\theta\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\theta(x) = \exp(-\pi x^2)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

I.E.1 justifier que $\theta \in \mathcal{S}$ et que $\mathcal{F}(\theta)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ y'(\xi) = -2\pi\xi y(\xi)$$

I.E.2 Établir que $\mathcal{F}(\theta) = \theta$.

On admettra que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\, \mathrm{d}x = 1$.

Partie II –Formule d'inversion de Fourier

Soit $f \in \mathcal{S}$. on suppose que $\mathcal{F}(f)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)\theta\left(\frac{\xi}{n}\right)\ \mathsf{d}\xi \qquad J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right)\mathcal{F}(\theta)(t)\ \mathsf{d}t$$

II.A Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)\ \mathsf{d}\xi$.

II.B Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

II.C Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = J_n$.
On admettra la formule de Fubini :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\theta\left(\frac{\xi}{n}\right)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\xi t}\ \mathsf{d}\xi\right)\ \mathsf{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\theta\left(\frac{\xi}{n}\right)\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\xi t}\ \mathsf{d}t\right)\ \mathsf{d}\xi$$

II.D Démontrer que $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)\ \mathsf{d}\xi$.
En déduire en utilisant la fonction $h\ :\ t \mapsto f(x+t)$, que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x\xi}\ \mathsf{d}\xi \tag{2.1}$$

Cette formule permet de reconstruire le signal f à partir de sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$.

II.E Une application
Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\xi x}}{1+(2\pi\xi)^2}\ \mathsf{d}\xi = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$.

Partie VI –Transformation de Laplace

Soit $f\ :\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue et nulle en dehors d'un segment. On définit la fonction $\mathcal{L}(f)$(*transformée de Laplace de f*) sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\ \mathsf{d}t$$

On admettra que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (\mathcal{L}(f))^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} f(t)t^n\mathrm{e}^{-xt}\ \mathsf{d}t$$

Rappelons que, pour tout réel x, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

VI.A On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, mutuellement indépendantes et suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

VI.A.0 Démontrer que la somme de deux variable aléatoire indépendantes et suivant une loi de Poisson suit encore une loi de Poisson.

VI.A.1 Par récurrence, démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, S_n suit la loi de poisson de paramètre $n\lambda$.
On admettra que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, les variables S_n et X_{n+1} sont indépendantes.

VI.A.2 Soit $\varepsilon > 0$. Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon) \leq \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$$

VI.A.3 Soit $\varepsilon > 0$. Justifier les deux inclusions suivantes :

$$(S_n > n(\lambda+\varepsilon)) \subset (|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon)$$

$$(S_n \leq n(\lambda-\varepsilon)) \subset (|S_n - n\lambda| \geq n\varepsilon)$$

VI.A.4 Dans toutes les questions qui suivent, on suppose $x \geq 0$.
Déduire du VI.A.3 que

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n \leq nx) = \begin{cases} 0 & \text{si}\ \ 0 \leq x < \lambda \\ 1 & \text{si}\ \ x > \lambda \end{cases}$$

VI.B A l'aide de la question VI.A, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{0\le k\le \lfloor nx\rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{-n\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0\le x<\lambda \\ 1 & \text{si } x>\lambda \end{cases}$$

VI.C Dans la suite de cette partie, on admettra que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{0\le k\le \lfloor nx\rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!}\mathrm{e}^{-n\lambda} = \frac{1}{2} \quad \text{si} \quad x=\lambda$$

VI.C.1 Soit $x\ge 0$. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{0\le k\le \lfloor nx\rfloor} (-1)^k \frac{n^k}{k!}(\mathcal{L}(f))^{(k)}(n) = \int_0^x f(y)\,\mathsf{d}y$$

VI.C.2 En déduire que $\mathcal{L}\ :\ f\mapsto \mathcal{L}(f)$ est injective sur l'ensemble des fonctions à valeurs complexes, continues sur $\mathbb{R}_+$, et nulles en dehors d'un segment.

Problème 2
Matrices de Hurwitz

Notations

- n désigne un entier naturel non nul.
- $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n et à coefficients dans $\mathbb{K}$ et pour une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique.
- $\mathbb{K}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
- $\mathrm{Re}^- = \{z\in\mathbb{C} \,/\, \mathrm{Re}(z)<0\}$.
- On désigne par $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$ sa norme associée :

$$\langle (x_1,x_2,\dots,x_n)\,,(y_1,y_2,\dots,y_n)\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

$$\|(x_1,x_2,\dots,x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

- On confondra abusivement, pour le calcul matriciel, le vecteur $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ avec la matrice colonne $X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
- Pour $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ de $\mathbb{C}^n$, on notera son conjugué $\bar{X}=(\overline{x_1},\overline{x_2},\dots,\overline{x_n})$, sa partie réelle $\mathrm{Re}(X)=\dfrac{X+\bar{X}}{2}$ et sa partie imaginaire $\mathrm{Im}(X)=\dfrac{X-\bar{X}}{2\mathrm{i}}$.
- Si $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (respectivement $\mathbb{C}^n$) canoniquement associé à M est :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ X & \longmapsto & MX \end{array} \quad \left(\text{respectivement } \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \longrightarrow & \mathbb{C}^n \\ X & \longmapsto & MX \end{array}\right).$$

Rappels

1. Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si il existe une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $A=PBP^{-1}$.

   Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si il existe une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ inversible telle que $A=PBP^{-1}$.
2. Soient R et S deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. le polynôme R est un diviseur de S s'il existe un polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que $S=QR$. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Objectifs

— La partie 1 concerne l'étude de propriétés de matrices semi-simples.
— La partie 2 propose de trouver une caractérisation de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
— La partie 3 est consacrée à l'étude des polynômes de Hurwitz.
— Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.

Partie I – Matrices semi-simples

Définition 1 : Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite semi-simple si elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Définition 2 : Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite presque diagonale s'il existe :

i) deux entiers naturels p et q ;
ii) q réels $a_1, a_2, \ldots, a_q$;
iii) q réels non nuls $b_1, b_2, \ldots, b_q$;
iv) une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ tels que $p + 2q = n$ et M est la matrice bloc suivante :

$$M = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & M(a_1, b_1) & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & M(a_2, b_2) & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & M(a_q, b_q) \end{pmatrix}$$

où : $\forall j \in [\![1, q]\!]$, $M(a_j, b_j) = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$. Si $p = 0$, la matrice D n'est pas présente dans la matrice diagonale par blocs M. De même, si $q = 0$, alors $M = D$.

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Q1. La matrice A est-elle semi-simple ?

Soit B la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q2. Démontrer que B est semi-simple et en déduire l'existence d'une matrice Q de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible et de deux réels a et b à déterminer tels que :

$$B = Q \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Indication : on pourra, pour un vecteur propre V de B, introduire les vecteurs $W_1 = Re(V)$ et $W_2 = Im(V)$.

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On suppose dans la question Q3 seulement que M admet deux valeurs propres complexes $\mu = a + \mathrm{i}b$ et $\bar{\mu} = a - \mathrm{i}b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^\star$.

Q3. Démontrer que M est semi-simple et semblable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Q4. Démontrer que M est semi-simple si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

i) M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$;
ii) χ_M admet deux racines complexes conjuguées de partie imaginaire non nulle.

Q5. Soit N une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblable à une matrice presque diagonale. Démontrer que N est semi-simple.

Q6. Soit N une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner la forme factorisée de χ_N dans $\mathbb{C}[X]$, en précisant dans les notations, les racines réelles et les racines complexes conjuguées. En déduire que si N est semi-simple alors elle est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à une matrice presque diagonale.

Partie II – Une caractérisation des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et u désigne un endomorphisme de E.

On suppose dans les questions Q7, Q8 et Q9 que u est diagonalisable. On note $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u. Soit F un sous-espace vectoriel de E, différent de $\{0_E\}$ et de E.

Q7. Démontrer qu'il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $v_k \notin F$ et qu'alors F est la droite vectorielle engendrée par v_k sont en somme directe.

On note alors :

$$\mathcal{A} = \{H \text{ sous-espace vectoriel de } E \text{ tel que } u(H) \subseteq H \text{ et } F \cap H = \{0_E\}\}$$

et :

$$\mathcal{L} = \{p \in \mathbb{N}^\star \mid \exists H \in \mathcal{A} : p = \dim(H)\}\,.$$

Q8. Démontrer que $\mathcal{L}$ admet un plus grand élément que l'on nommera r.

Q9. Démontrer que F admet un supplémentaire G dans E, stable par u.

Q10. On suppose que tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire dans E, stable par u. Démontrer que u est diagonalisable. En déduire une caractérisation des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
Indication : on pourra raisonner par l'absurde et introduire un sous-espace vectoriel, dont on justifiera l'existence, de dimension $n - 1$ et contenant la somme des sous-espaces propres de u.

Partie III – Polynômes de Hurwitz

Définition 3 : Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est dit polynôme de Hurwitz si ses racines dans $\mathbb{C}$ appartiennent à :

$$\mathrm{Re}^- = \{z \in \mathbb{C} \,/\, \mathrm{Re}(z) < 0\}.$$

Définition 4 : Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est dit à coefficients strictement positifs s'il est non nul et si, d désignant son degré, $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ où, pour tout $k \in [\![0, d]\!]$, $a_k > 0$.

Q11. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer que si α est une racine d'un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, à coefficients strictement positifs, alors $\alpha < 0$.

Q12. Démontrer que tout diviseur d'un polynôme de Hurwitz est un polynôme de Hurwitz.

Q13. Soit P un polynôme de Hurwitz de $\mathbb{R}[X]$ irréductible et à coefficient dominant positif. Démontrer que tous les coefficients de P sont strictement positifs.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. On définit les deux polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $\mathbb{C}[X]$ par :

$$P(X) = \prod_{k=1}^{n} (X - z_k) \quad \text{et} \quad Q(X) = \prod_{(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2} (X - z_k - z_\ell)\,.$$

Q14. On suppose $n = 2$ et $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Si les coefficients de Q sont strictement positifs, P est-il alors un polynôme de Hurwitz ?

Q15. Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ dont tous les coefficients sont strictement positifs. Démontrer que les coefficients du produit AB sont également strictement positifs.

Q16. Démontrer que si P et Q sont dans $\mathbb{R}[X]$, alors on a l'équivalence : P est un polynôme de Hurwitz si et seulement si les coefficients de P et Q sont strictement positifs.