Concours Blanc « e3a-ccinp » Pc-Psi

Composition de Mathématiques
Durée 4 heures

~~Concours Blanc~~ DNS 9 « e3a-ccp » Pc-Psi

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Aucun document autorisé ; calculatrice et tout matériel électronique interdits

Exercice 1
La constante d'Euler

Exercice 1 : ccinp pc 2022, exercice 3

Présentation générale

Dans cet exercice, on commence dans la première partie par démontrer la convergence d'une suite afin de définir la constante d'Euler comme sa limite. Dans la seconde partie, on détermine une expression de cette constante sous la forme d'une intégrale.

Partie I – Construction de la constante d'Euler

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \quad u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$$

et on considère la suite $(\Delta_n)_{n\geq 2}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \Delta_n = u_n - u_{n-1}\,.$$

Q1. Déterminer un nombre $a \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que $\Delta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{a}{n^2}$.

Q2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \Delta_n$ est convergente.

Q3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente.

Correction :

Q1. Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, on a $\Delta_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} + \ln(n-1) = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \left(\frac{-1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{2n^2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n^2}$. Ainsi $\boxed{a=\frac{1}{2}}$.

Q2. Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann de paramètre $2>1$), d'après la règle des équivalents (comme $\frac{-1}{n^2}<0$, donc de signe constant), on a $\boxed{\sum \Delta_n \text{ converge absolument donc converge}}$.

Q3. On viens de montrer que la série $\sum u_n - u_{n-1}$ converge, or c'est une série télescopique, ainsi $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge}}$.
Remarque : Si on veut détailler, il suffit d'écrire, pour $n \geq 2$, $\Delta_n = u_n - u_1$ pour avoir le résultat (et comme $u_1 = 1$, que la limite de (u_n) n'est rien d'autre que 1 plus la somme de la série $\sum \Delta_n$).

Partie II – Expression intégrale de la constante d'Euler

Dans **Q3**, on a montré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge vers un nombre réel que l'on note γ dans la suite de l'exercice. Ce dernier est appelé constante d'Euler. Dans cette partie, on détermine une expression de γ sous la forme d'une intégrale.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère la fonction $f_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad f_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \ln(t) & \text{si } t < n \\ 0 & \text{si } t \geq n \end{cases}.$$

II.1 – Propriétés de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$

Dans cette sous-partie, on pourra utiliser librement l'inégalité $\ln(1 + x) \leq x$ valable pour tout $x \in] - 1, +\infty[$.

Q4. Soit $t \in]0, +\infty[$. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ vérifiant $n \geq n_0$, on a :

$$f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t).$$

Q5. Déduire de la question précédente que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ converge simplement vers la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln(t)$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Q6. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a $|f_n(t)| \leq \mathrm{e}^{-t}|\ln(t)|$.

Q7. Montrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\ln(t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

II.2 – Convergence d'une suite d'intégrales

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on considère les intégrales :

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\mathsf{d}t = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\mathsf{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 u^n \ln(1 - u)\,\mathsf{d}u.$$

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^\star$.

Q8. Montrer que l'intégrale I_n est convergente.

Q9. Déduire des résultats de la sous-partie **II.1** que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ est convergente et que :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\mathsf{d}t.$$

Q10. Montrer que l'intégrale J_n est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{u^{n+1} - 1}{u - 1}\,\mathsf{d}u$$

est convergente. En déduire que l'intégrale J_n est convergente et que l'on a les égalités :

$$J_n = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{u^{n+1} - 1}{u - 1}\,\mathsf{d}u = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}.$$

Q11. Montrer que l'on a la relation :

$$I_n = \frac{n}{n+1}\ln(n) + nJ_n.$$

Q12. Déduire des questions précédentes que :

$$\gamma = -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\mathsf{d}t.$$

Correction :

Q4. Soit $t>0$, posons $n_0=\lfloor t\rfloor+1$, ainsi $n_0>t$. Ainsi pour tout $n\geq n_0$ on a $n>t$ et donc $f_n(t)=\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ln(t)$.

Q5. Soit $t>0$, et soit $n_0=\lfloor t\rfloor+1$, ainsi pour $n\geq n_0$ on a (puisque $\frac{t}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$) : $f_n(t)=\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ln(t)=\mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}\ln(t)=\mathrm{e}^{n\left(\frac{-t}{n}+\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)}\ln(t)=\mathrm{e}^{-t+\underset{n\to+\infty}{o}(1)}\ln(t)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\mathrm{e}^{-t}\ln(t)=f(t)$. Ce qui montre bien $\boxed{\text{la convergence simple de } (f_n) \text{ vers } f}$.

Q6. Soit $n\in\mathbb{N}^\star$ et $t>0$, si $n\leq t$, on a bien $|f_n(t)|=0\leq\mathrm{e}^{-t}|\ln(t)|$, si $n>t$, on a (puisque $\frac{-t}{n}>-1$) : $|f_n(t)|=\left|\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ln(t)\right|=\mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)}|\ln(t)|\leq\mathrm{e}^{n\frac{-t}{n}}|\ln(t)|=\mathrm{e}^{-t}|\ln(t)|$. On a bien montré que : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^\star,\ \forall t>0,\ |f_n(t)|\leq\mathrm{e}^{-t}|\ln(t)|}$.

Q7. La fonction $\varphi : t\mapsto\mathrm{e}^{-t}|\ln(t)|$ est continue sur $]0,+\infty[$.
— En 0 : On a $\varphi(t)\underset{t\to0}{\sim}-\ln(t)$, comme la fonction ln est intégrable sur $]0,1]$, il en va de même pour φ.
— En $+\infty$: On a $\varphi(t)=\underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, comme $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, il en va de même pour φ.

En conclusion, $\boxed{\text{la fonction } t\mapsto\mathrm{e}^{-t}\ln(t) \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[}$.

Q8. Pour $n\geq1$, la fonction $\varphi : t\mapsto\mathrm{e}^{-t}|\ln(t)|$ domine (d'après Q6) la fonction f_n, de plus (d'après Q7), la fonction φ est intégrable sur $]0,+\infty[$, il en va donc de même pour f_n, ainsi $\boxed{\text{l'intégrale } I_n \text{ est convergente}}$.

Q9. Appliquons le théorème de convergence dominée, on a :
— La suite (f_n) converge simplement (d'après Q5) sur $]0,+\infty[$ vers la fonction $f : t\mapsto\mathrm{e}^{-t}\ln(t)$.
— Toutes les fonctions f_n et la fonction f sont continues par morceaux sur $]0,+\infty[$.
— Hypothèse de domination : Pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$ et $t>0$, on a $|f_n(t)|\leq\mathrm{e}^{-t}|\ln(t)|=\varphi(t)$ (d'après Q6) et φ est bien intégrable sur $]0,+\infty[$ d'après Q7.

Ainsi le théorème de convergence dominée s'applique, on a non seulement que toutes les fonctions f_n et f sont intégrables sur $]0,+\infty[$ (montrés aux questions précédentes), mais surtout que : $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_0^{+\infty}f_n(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t$, ie $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t}$.

Q10. Procédons par intégration par parties, pour $u\in[0,1[$, posons $f(u)=\frac{u^{n+1}-1}{n+1}$ et $g(u)=\ln(1-u)$, les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$, et pour $u\in[0,1[$, $f'(u)=u^n$ et $g'(u)=\frac{-1}{1-u}=\frac{1}{u-1}$.

Or, en posant $u=1+t$, on a $u^{n+1}-1=(1+t)^{n+1}-1=1+(n+1)t+\underset{t\to0}{o}(t)-1\underset{u\to1}{\sim}(n+1)(u-1)$. Ainsi $f(u)g(u)\underset{u\to1}{\sim}-(1-u)\ln(1-u)\underset{u\to1}{\longrightarrow}0$ (par croissance comparée). Ainsi le crochet $\Big[f(u)g(u)\Big]_0^1$ converge (pas de problème en 0 puisque $f(0)g(0)=0$).

Ainsi, par intégration par parties, les intégrales $\int_0^1 f'(u)g(u)\mathrm{d}u$ et $\int_0^1 f(u)g'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature, or $\int_0^1 f(u)g'(u)\mathrm{d}u$ et $\int_0^1(n+1)f(u)g'(u)\mathrm{d}u$ sont de même nature. Ainsi $\boxed{\text{l'intégrale } J_n \text{ est convergente si et seulement si l'intégrale } \int_0^1\frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u \text{ est convergente}}$.

Cette dernière intégrale est faussement généralisée puisque $\mapsto\frac{u^{n+1}-1}{u-1}$ est continue sur $[0,1[$, et qu'on a $\frac{u^{n+1}-1}{u-1}\underset{u\to1}{\longrightarrow}(n+1)$, ainsi elle converge, donc $\boxed{\text{l'intégrale } J_n \text{ converge}}$, et la formule d'intégration par parties donne : $J_n=\Big[f(u)g(u)\Big]_0^1-\displaystyle\int_0^1 f(u)g'(u)\mathrm{d}u$, ainsi $\boxed{J_n=-\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1\frac{u^{n+1}-1}{u-1}\mathrm{d}u}$.

Or pour tout u on a $u^{n+1}-1=(u-1)\displaystyle\sum_{k=0}^n u^k$. Ainsi par linéarité de l'intégrale (somme finie d'intégrales propres) on a : $J_n=-\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\int_0^1\sum_{k=0}^n u^k\mathrm{d}u=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n\int_0^1u^k\mathrm{d}u=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^n\frac{1}{k+1}$. On a bien montré (après réindexation) : $\boxed{J_n=-\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}}$.

Q11. Procédons au changement de variable $t=n(1-u)$, affine donc licite (bijection strictement décroissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $[0,n]$) : $I_n=\displaystyle\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\ln(t)\mathrm{d}t=\int_1^0u^n\ln(n(1-u))(-n)\mathrm{d}u=n\int_0^1u^n\left(\ln(n)+\ln(1-u)\right))\mathrm{d}u=n\ln(n)\int_0^1u^n\mathrm{d}u+nJ_n=\frac{n\ln(n)}{n+1}+nJ_n$. Ce qui montre bien que :

$\boxed{I_n = \dfrac{n}{n+1}\ln(n) + nJ_n}$.

Q12. Pour $n \geq 2$, on en déduit donc (en utilisant la question Q10) que : $I_n = \dfrac{n}{n+1}\ln(n) - \dfrac{n}{n+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} = \dfrac{-n}{n+1}\left(\dfrac{1}{n+1} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right) = \dfrac{-n}{n+1}\left(\dfrac{1}{n+1} + u_n\right)$. Ainsi $u_n = -\dfrac{n+1}{n}I_n - \dfrac{1}{n+1}$, comme (u_n) converge vers γ, $\left(\frac{n+1}{n}\right)$ converge vers 1, $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ vers 0, et en utilisant Q9, on en déduit donc que $\boxed{\gamma = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t}$.

Exercice 2
Transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal

Exercice 2 : CCP PSI 2020, Partie 1

Pour $x > 0$, on note :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t, \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\sin(t)\mathrm{d}t \text{ et } H(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\cos(t)\mathrm{d}t.$$

Q1. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ |\sin(t)| \leq t$.

Q2. Montrer que les fonctions F, G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$.

Q3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

Q4. Montrer que F est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer F' à l'aide de la fonction G.

Q5. Trouver une expression simple pour G et pour H. *On pourra calculer* $H(x) + iG(x)$.
En déduire, pour $\alpha \in]0, +\infty[$, la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\cos(\alpha t)\mathrm{d}t$.

Q6. En déduire une expression simple pour F. Que vaut $F(1)$?

Correction :

Q1. La fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $|sin'| = |\cos| \leq 1$, donc d'après l'inégalité des accroissements finis on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, que $|\sin(x) - \sin(0)| \leq 1\,|x - 0|$, ainsi : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+,\ |\sin(t)| \leq t}$.
Alternative : le résultat est clairement vrai pour $t \geq 1$, pour $t \in [0, 1]$, comme le sinus est positif sur cet intervalle, on peut étudier $\varphi : t \mapsto \sin(t) - t$ (φ est dérivable et $\varphi' = \cos(t) - 1 \leq 0$ donc φ est décroissante, comme $\varphi(0) = 0$, φ est négative).

Q2. Pour $x > 0$ et $t > 0$ on pose $f(x, t) = \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{e}^{-tx}$, $g(x, t) = \mathrm{e}^{-tx}\sin(t)$ et $h(x, t) = \mathrm{e}^{-tx}\cos(t)$.
Soit $x > 0$ fixé, $t \mapsto f(x, t)$, $t \mapsto g(x, t)$ et $t \mapsto h(x, t)$ sont continues sur $]0, +\infty[$, donc les trois intégrales ne sont généralisées qu'en 0 et $+\infty$.

— En 0 les trois fonctions sont prolongeable par continuité ($f(x, t) \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{t}\mathrm{e}^{-tx} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$, $g(x, 0) = 0$ et $h(x, 0) = 1$) donc les intégrales sont faussement généralisées en 0.

— En $+\infty$, par croissance comparée on a $t^2 f(x, t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $f(x, t) = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ (idem pour g et h), comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ converge il en va de même pour $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x, t)\mathrm{d}t$ (idem avec g et h).

Ainsi $\boxed{F, G \text{ et } H \text{ sont bien définies sur }]0, +\infty[}$.
Alternative : Soit $x > 0$ fixé, on peut utiliser la question précédente pour montrer pour tout $t > 0$ que $|f(x, t)| \leq \mathrm{e}^{-tx}$, comme on a aussi $|g(x, t)| \leq \mathrm{e}^{-tx}$ et $|h(x, t)| \leq \mathrm{e}^{-tx}$, comme $t \mapsto f(x, t)$, $t \mapsto g(x, t)$ et $t \mapsto h(x, t)$ sont continues sur $]0, +\infty[$, il suffit de montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t$ converge, ce qui est le cas car $x > 0$ (intégrale de référence).

Q3. D'après la question Q1, pour $x > 0$ et $t > 0$ on a $|f(x,t)| \leq \mathrm{e}^{-tx}$, on intègre l'inégalité pour t entre 0 et $+\infty$ (les intégrales convergent d'après la question précédente) : $\displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x,t|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t$, or $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{-tx}}{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}$. Comme $|F(x)| \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} |f(x,t|\,\mathrm{d}t$, on a $|F(x)| \leq \frac{1}{x}$, ainsi, par théorème de comparaison, on a bien $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0}$.

Alternative : on peut utiliser le théorème de convergence dominée, pour cela on doit passer par le critère séquentielle de la limite, ie introduire $(x_n) \in ([1, +\infty[)^{\mathbb{N}}$ (pour la domination, il est conseillé de prendre $x_n \geq 1$ dès le départ) tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ et montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} F(x_n) = 0$

Q4. Utilisons le théorème de dérivation $\mathcal{C}^1$ des intégrales à paramètre. On a bien :

— Pour $x > 0$ fixé, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$ et y est intégrable (d'après Q2).

— Pour $t \in]0, +\infty[$ fixé, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$, et pour $x > 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\sin(t)\mathrm{e}^{-tx}$.

— Pour $x > 0$ fixé, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$.

— Hypothèse de domination, soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^\star$ (ie $0 < a < b$), pour tout $x \in [a,b]$ et pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \mathrm{e}^{-ta} = \varphi_{a,b}(t)$, où on a posé $\varphi_{a,b}(t) = \mathrm{e}^{-ta}$. La fonction $\varphi_{a,b}$ est bien positive, continue par morceaux et intégrable (comme intégrale de référence) sur $]0, +\infty[$.

Ainsi F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment donc sur $\mathbb{R}_+^\star$ tout entier et, pour $x > 0$, $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = -G(x)$. On a bien montré $\boxed{F \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^\star \text{ et } F' = -G}$.

Q5. Pour $x > 0$, $H(x) + \mathrm{i}G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\cos(t)\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\sin(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}(\cos(t) + \mathrm{i}\sin(t))\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})t}\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})t}}{-x+\mathrm{i}}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x-\mathrm{i}} = \frac{x+\mathrm{i}}{x^2+1}$, où on a utilisé $\left|\dfrac{\mathrm{e}^{(-x+\mathrm{i})t}}{-x+\mathrm{i}}\right| = \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{1+x^2}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Il suffit de prendre la partie imaginaire et réelle pour avoir : $\boxed{\forall x > 0,\ G(x) = \frac{1}{x^2+1} \text{ et } H(x) = \frac{x}{x^2+1}}$.

Soit $\alpha > 0$, dans $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\cos(\alpha t)\mathrm{d}t$ procédons au changement de variable $\alpha t = u$ qui est affine donc licite (bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$, ainsi $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\cos(\alpha t)\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u\frac{x}{\alpha}}\cos(u)\frac{1}{\alpha}\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales si elles convergent, or la seconde n'est rien d'autre que $\frac{1}{\alpha}H\left(\frac{x}{\alpha}\right)$. Or $\frac{1}{\alpha}H\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha}\frac{x/\alpha}{x^2/\alpha^2+1} = \frac{x}{x^2+\alpha^2}$. On a donc montré que : $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\cos(\alpha t)\mathrm{d}t = \frac{x}{x^2+\alpha^2}}$

Q6. D'après Q4 et Q5 on a, pour tout $x > 0$, que $F'(x) = -G(x) = \frac{-1}{x^2+1}$, ainsi il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $F = -\arctan + C$, on prend la limite en $+\infty$ pour obtenir (d'après Q3) : $0 = -\frac{\pi}{2} + C$, ie $C = \frac{\pi}{2}$. On a donc $\boxed{F = \frac{\pi}{2} - \arctan}$, ainsi $\boxed{F(1) = \frac{\pi}{4}}$.

Exercice 3

Exercice 3 : E3A PC 2020, exercice 5

Dans cet exercice, E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à 2 et à coefficients réels et $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique.
Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E, on pose :

$$\langle P|Q\rangle = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1).$$

Q1. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

Q2. Déterminer une base orthonormale de E pour ce produit scalaire.

Q3. Déterminer la distance du polynôme $U = X^2 - 4$ à $\mathbb{R}_1[X]$.

Q4. Soit H l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1)=0$.

Q4.1 Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E. Quelle est sa dimension ?

Q4.2 Soit φ la projection orthogonale sur H. Déterminer la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

Correction :

Q1. Tout d'abord $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bien une application de E dans $\mathbb{R}$, vérifions que c'est un produit scalaire.

— Par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bien symétrique.

— Pour $(P,Q,R)\in E^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, $\langle P+\lambda Q|R\rangle=(P(1)+\lambda Q(1))R(1)+(P'(1)+\lambda Q'(1))R'(1)+(P''(1)+\lambda Q''(1))R''(1)=P(1)R(1)+P'(1)R'(1)+P''(1)R''(1)+\lambda(Q(1)R(1)+Q'(1)R'(1)+Q''(1)R''(1))=\langle P|Q\rangle+\lambda\langle Q|R\rangle$, ainsi $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bien linéaire en sa première variable et donc, par symétrie, est bilinéaire.

— Pour $P\in E$, $\langle P|P\rangle=P(1)^2+P'(1)^2+P''(1)^2\geq 0$, ainsi $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est bien positif.

— Soit $P\in E$ tel que $\langle P|P\rangle=0$, ie $P(1)^2+P'(1)^2+P''(1)^2=0$, ainsi $P(1)^2=P'(1)^2=P''(1)^2=0$, ie $P(1)=P'(1)=P''(1)=0$, donc 1 est racine de multiplicité au moins 3 de P, comme $\deg(P)\leq 2$, on a donc $P=0$, ainsi $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est définie.

Ainsi $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est une forme bilinéaire symétrique sur E, ie $\boxed{\langle\cdot|\cdot\rangle \text{ est un produit scalaire sur } E}$.

Q2. Appliquons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique $(1,X,X^2)$ de E.

— Posons $L_0=\frac{1}{\|1\|}1=1$.

— Posons $\tilde{L_1}=X-\langle X|1\rangle 1=X-1$, comme $\|X-1\|=\sqrt{0+1+0}=1$, on pose $L_1=X-1$.

— Posons $\tilde{L_2}=X^2-\langle X^2|X-1\rangle(X-1)-\langle X^1|1\rangle 1$. Comme $\langle x^2|X-1\rangle=0+2+0=2$, $\langle X^2|1\rangle=1+0+0=1$, on a donc $\tilde{L_2}=X^2-2(X-1)-1=X^2-2X+1=(X-1)^2$, comme $\langle (X-1)^2|(X-1)^2\rangle=0+0+4$, on pose donc $L2=\frac{1}{2}(X-1)^2$.

Ainsi $\boxed{(1,X-1,\frac{1}{2}(X-1)^2) \text{ est une base orthonormée pour } \langle\cdot|\cdot\rangle}$.

Q3. Comme $(1,X-1)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$, on en déduit que la projeté orthogonale de $P\in E$ sur $\mathbb{R}_1[X]$ est $p_1(P)=\langle P|1\rangle 1+\langle P|X-1\rangle(X-1)$, ainsi $p_1(X^2-4)=-3+2(X-1)=2X-5$. Or on sait que $d(X^2-4,\mathbb{R}_1[X])=\|X^2-4-p_1(X^2-4)\|=\|X^2-2X+1\|=\|(X-1)^2\|=\sqrt{0+0+4}=2$. Ce qui montre que $\boxed{d(X^2-4,\mathbb{R}_1[X])=2}$.

Q4. **Q4.1** Soit φ l'application de E dans $\mathbb{R}$ définie pour $P\in E$, par $\varphi(P)=P(1)$, φ est bien linéaire sur E (pour $(P,Q)\in E^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, $\varphi(P+\lambda Q)=(P+\lambda Q)(1)=P(1)+\lambda Q(1)=\varphi(P)+\lambda\varphi(Q)$) et comme $H=\mathrm{Ker}(\varphi)$ on a bien que $\boxed{H \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$. De plus $\varphi(1)=1\neq 0$, on a $\mathrm{rg}(\varphi)\geq 1$ et comme φ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ on a $\mathrm{rg}(\varphi)\leq 1$, d'où $\mathrm{rg}(\varphi)=1$, ainsi d'après le théorème du rang, $\boxed{H \text{ est de dimension } 2}$ (ie c'est un hyperplan de E).

Q4.2 La famille $(X-1,\frac{1}{2}(X-1)^2)$ est une famille orthonormale (donc libre puisque les éléments sont non nuls) de deux éléments de H qui est donc une base orthonormale de H, de plus comme 1 est orthogonal aux deux vecteurs de cette base de H on a donc $H^\perp=\mathrm{Vect}(1)$.

Notons p_H (resp $p_{H^\perp}$) la projection orthogonale sur H (resp. $H^\perp$), pour $P\in E$, on a $p_H(P)=P-p_{H^\perp}(P)$, or $p_{H^\perp}(P)=\langle P|1\rangle 1$. Comme $p_{H^\perp}(1)=1$, on a $p_H(1)=0$, comme $p_{H^\perp}(X)=1$, on a $p_H(X)=X-1$, comme $p_{H^\perp}(X^2)=1$, on a $p_H(X^2)=X^2-1$.

Ainsi $\boxed{\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}(p_H)=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$.

Exercice 4
Étude d'un endomorphisme sur un espace de polynômes

Exercice 4 : CCINP PC 2022, exercice 1

Présentation générale

On rappelle le théorème de la division euclidienne pour les polynômes : si $U \in \mathbb{C}[X]$ et $V \in \mathbb{C}[X]$ sont deux polynômes avec $V \neq 0$, alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que :

$$U = VQ + R \quad \text{avec} \quad (R = 0 \quad \text{ou} \quad \deg(R) < \deg(V)) \,.$$

Les polynômes Q et R sont respectivement appelés le quotient et le reste dans la division euclidienne du polynôme U par V.
Dans cet exercice, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^\star$ et un couple $(A, B) \in \mathbb{C}_n[X] \times \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg(B) = n + 1$. On considère également l'application φ définie sur $\mathbb{C}_n[X]$ qui à un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ associe le reste dans la division euclidienne de AP par B.
Par exemple, si on suppose que l'on a :

$$n = 2, \quad A = X^2, \quad B = X^3 - X, \quad P = X^2 + X + 1,$$

alors, en effectuant la division euclidienne de AP par B, on obtient :

$$AP = X^4 + X^3 + X^2 = BQ + R \quad \text{avec} \quad Q = X + 1 \quad \text{et} \quad R = 2X^2 + X \,,$$

donc on a $\varphi(P) = 2X^2 + X$.

Partie I – Généralités sur l'application φ

Dans cette partie, on démontre que l'application φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q1. Justifier que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]$.

On considère deux polynômes $P_1 \in \mathbb{C}_n[X]$ et $P_2 \in \mathbb{C}_n[X]$. Par le théorème de la division euclidienne rappelé dans la présentation, il existe $(Q_1, R_1) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{C}[X] \times \mathbb{C}_n[X]$ tels que :

$$AP_1 = BQ_1 + R_1 \quad \text{et} \quad AP_2 = BQ_2 + R_2 \,.$$

Q2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Exprimer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ par B en fonction de λ et des polynômes Q_1, Q_2, R_1 et R_2 en justifiant votre réponse. En déduire que φ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_n[X]$.

Correction :

Q1. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\varphi(P)$ est le reste de la division euclidienne de AP par B ainsi $\varphi(P)$ est un polynôme et $\deg(\varphi(P)) < \deg(B) = n + 1$, ce qui montre bien $\deg(\varphi(P)) \leq n$ et donc que $\boxed{\varphi(P) \in \mathbb{C}_n[X]}$.

Q2. On a : $A(P_1 + \lambda P_2) = AP_1 + \lambda P_2 = BQ_1 + R_1 + \lambda(BQ_2 + R_2) = B(Q_1 + \lambda Q_2) + (R_1 + \lambda R_2)$. De plus $\deg(R_1 + \lambda R_2) \leq \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) < \deg(B)$. Ainsi, par unicité dans le théorème de la division euclidienne, $Q_1 + \lambda Q_2$ est le quotient de la division euclidienne de $A(P_1 + \lambda P_2)$ et $R_1 + \lambda R_2$ le reste, ainsi $\varphi(P_1 + \lambda P_2) = R_1 + \lambda R_2 = \varphi(P_1) + \lambda\varphi(P_2)$. Ce qui montre la linéarité de φ, comme on a montré à la question précédente que c'était une application de $\mathbb{C}_n[X]$ dans lui-même, on a bien montré que $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{C}_n[X]}$.

Partie II – Étude d'un premier exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que :

$$n = 2, \quad A = X^2 + 2X \quad \text{et} \quad B = X^3 + X^2 - X - 1 \,.$$

Q3. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \,.$$

Q4. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice M.

Q5. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable. Déterminer une base de $\mathbb{C}_2[X]$ formée de vecteurs propres de φ.

Correction :

Q3. On a $A = X^2 + 2X = 0.B + X^2 + 2X$, ainsi $\varphi(1) = 2X + X^2$. On a $AX = X^3 + 2X^2 = 1.B + X^2 + X + 1$, ainsi $\varphi(X) = 1 + X + X^2$. On a $AX^2 = (X+1)B + 1 + 2X$, ainsi $\varphi(X^2) = 1 + 2X$. Ce qui montre bien que $\boxed{\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}(\varphi) = M}$.

Q4. Tout d'abord, $\chi_M(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & -1 \\ -2 & X-1 & -2 \\ -1 & -1 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -2 & X-1 & -(X+1) \\ -1 & -1 & X+1 \end{vmatrix}$ $(C_3 \leftarrow C_3 - C_2)$, ainsi $\chi_M(X) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -3 & X-2 & 0 \\ -1 & -1 & X+1 \end{vmatrix}$ $(L_2 \leftarrow L_2 + L_3)$. Ainsi $\chi_M(X) = (X+1)\begin{vmatrix} X & -1 \\ -3 & X-2 \end{vmatrix} = (X+1)\left(X(X-2)-3\right) = (X+1)(X^2-2X-3) = (X+1)^2(X-3)$. Ainsi $\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{-1, 3\}}$.

Notons, pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$, $E_\lambda(M) = \mathrm{Ker}(M - \lambda I_3)$ l'espace propre de valeur propre λ de M.

On a $M + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, cette matrice est de rang un, donc d'après le théorème du rang son noyau est de dimension deux, on remarque que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs non colinéaires du noyau de $M + I_3$, ainsi $\boxed{E_1(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)}$. *Alternative* : On peut bien entendu déterminer le noyau en résolvant un système.

On a $M - 3I_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, on a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3(M) \iff$

$$\begin{cases} -3x + y + z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ x + y - 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ -3x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ -4y + 8z = 0 \\ 4y - 8z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + \quad - z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = 2z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

. Ainsi $\boxed{E_{-3}(M) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$.

Alternative : On peut signaler que $\mathrm{Ker}(M - 3I_3)$ est de dimension 1 (car valeur propre simple) et remarquer que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est dans ce noyau.

Q5. On a $\dim(E_1(M)) + \dim(E_{-3}(M) = 2 + 1 = 3$, ainsi M et donc $\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable}}$, de plus on a que $\boxed{\left(1 - X, 1 - X^2, 1 + 2X + X^2\right) \text{ est une base constituée de vecteurs propres de } \varphi}$.

Partie III – Étude d'un second exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$ et que $B = X^3$. Comme A est un élément de l'espace vectoriel $\mathbb{C}_2[X]$, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2$.

Q6. Montrer que la matrice de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[X]$ dans la base $(1, X, X^2)$ est :

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

Q7. Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable si et seulement si le polynôme A est constant.

Correction :

Q6. On a $A = \alpha + \beta X + \gamma X^2 = 0.B + \alpha + \beta X + \gamma X^2$, ainsi $\varphi(1) = \alpha + \beta X + \gamma X^2$. On a $AX = \alpha X + \beta X^2 + \gamma X^3 = \gamma B + \alpha X + \beta X^2$, ainsi $\varphi(X) = \alpha X + \beta X^2$. On a $AX^2 = \alpha X^2 + \beta X^3 + \gamma X^4 = (\beta + \gamma X)B + \alpha X^2$, ainsi $\varphi(X^2) = \alpha X^2$. Ce qui montre bien que $\boxed{\mathrm{Mat}_{(1,X,X^2)}(\varphi) = T}$.

Q7. Comme T est triangulaire, $\mathrm{Sp}(T) = \{\alpha\}$, on a : T diagonalisable $\iff \exists P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C}) \,/\, T = P\alpha I_3 P^{-1} \iff T = \alpha I_3 \iff \beta = \gamma = 0$. Ainsi φ est diagonalisable si et seulement si A est constant.

Partie IV – Étude du cas où B est scindé à racines simples

Dans cette partie, on ne suppose plus que $n = 2$: le nombre n est un entier quelconque de $\mathbb{N}^\star$. Jusqu'à la fin de l'exercice, on suppose que B est un polynôme scindé à racines simples. On note $x_0, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ les racines de B qui sont donc des nombres complexes distincts.
On définit les polynômes de Lagrange $L_0, \ldots, L_n \in \mathbb{C}_n[X]$ associés aux points $x_0, \ldots, x_n$ par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad L_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{X - x_i}{x_k - x_i}.$$

En particulier, les relations suivantes sont vérifiées :

$$\forall (k, j) \in [\![0, n]\!]^2, \quad L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = k \\ 0 & \text{si} \quad j \neq k \end{cases}.$$

IV.1 – Décomposition avec les polynômes de Lagrange

Q8. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que $x_0, \ldots, x_n$ sont des racines du polynôme $D = P - \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(x_i)L_i$.

Q9. Déduire de la question précédente que pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$, on a $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(x_i)L_i$.

Q10. Montrer que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

IV.2 – Réduction de l'endomorphisme φ

Pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$, on désigne respectivement par $Q_k \in \mathbb{C}[X]$ et $R_k \in \mathbb{C}_n[X]$ le quotient et le reste dans la division euclidienne de AL_k par B.

Q11. Soit $(j, k) \in [\![0, n]\!]^2$. Montrer que $R_k(x_j) = 0$ si $j \neq k$ et que $R_k(x_k) = A(x_k)$.

Q12. En utilisant **Q9**, en déduire pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ que $\varphi(L_k) = A(x_k)L_k$.

Q13. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

Correction :

Q8. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a $D(x_k) = P(x_k) - \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(x_i)L_i(x_k)$, or pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a $L_i(x_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ 1 & \text{si } k = i \end{cases}$, ainsi $D(x_k) = P(x_k) - P(x_k) = 0$. On a bien montré que $\boxed{x_0, \ldots, x_n \text{ sont des racines du polynôme } D}$.

Q9. Le polynôme D est de degré inférieur ou égal à n (car combinaison linéaire de polynômes qui le sont), or D possède $n + 1$ racines distinctes d'après la question précédente, ainsi $D = 0$, ce qui montre bien que $\boxed{\forall P \in \mathbb{C}_n[X],\ P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} P(x_i)L_i}$.

Q10. D'après la question précédente, la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est génératrice de $\mathbb{C}_n[X]$, comme elle possède $n + 1 = \dim(\mathbb{C}_n[X])$ éléments, on a bien que $\boxed{(L_0, \ldots, L_n) \text{ est une base de } \mathbb{C}_n[X]}$.
Alternative : On peut aussi montrer la liberté : Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\lambda_0 L_0 + \ldots + \lambda_n L_n = 0$, pour $k \in [\![0, n]\!]$, en évaluant l'égalité en x_k on obtient $\lambda_k = 0$, ceci étant vérifié pour tout k, la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est libre, et comme elle est de cardinal $n + 1 = \dim(\mathbb{C}_n[X])$, on a bien que $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.

Q11. Soit $(j,k) \in [\![0,n]\!]^2$. On a $AL_k = Q_kB + R_k$. On évalue cette égalité en x_j, ainsi $A(x_j)L_k(x_k) = Q_k(x_j)B(x_j) + R_k(x_j)$, or $B(x_j) = 0$ et $L_k(x_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ 1 & \text{si } k = i \end{cases}$, ce qui montre bien que $\boxed{R_k(x_j) = 0 \text{ si } j \neq k \text{ et que } R_k(x_k) = A(x_k)}$.

Q12. Soit $k \in [\![0,n]\!]$, on a $\varphi(L_k) = R_k$, en appliquant Q9 à R_k on a $R_k = \sum_{i=0}^{n} R_k(x_i)L_i$, ainsi, d'après la question précédente $R_k = A(x_k)L_k$, ce qui montre bien que $\boxed{\varphi(L_k) = A(x_k)L_k}$.

Q13. On vient de montrer, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, que L_k (qui est non nul) est vecteur propre de φ de valeur propre L_k, ainsi $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de vecteurs propres de φ, ainsi $\boxed{\varphi \text{ est diagonalisable}}$, et on a aussi que $\boxed{\text{les valeurs propres de } \varphi \text{ sont } A(x_0), \dots, A(x_n)}$.

Exercice 5

Exercice 5 : E3A PC 2020, exercice 4

Q1. Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq I_n$ et $M \neq \frac{1}{2}I_n$, vérifiant la relation :

$$2M^2 = 3M - I_n.$$

Q1.1 On note $F = \mathrm{Vect}(I_n, M, M^2)$. Prouver que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k \in F$.
Déterminer la dimension de F et en donner une base.

Q1.2 Vérifier que F est stable pour la multiplication des matrices.

Q1.3 Soient $A = M - I_n$ et $B = M - \frac{1}{2}I_n$.
Justifier que $\mathcal{B} = (A, B)$ constitue une base de F.
Déterminer les composantes des matrices AB, BA, A^2 et B^2 dans la base $\mathcal{B}$.

Q1.4 Déterminer toutes les matrices T de F vérifiant $T^2 = M$.

Q2. Soit X une variable aléatoire réelle telle que l'on a :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad 2\mathbb{P}(X = n+2) = 3\mathbb{P}(X = n+1) - \mathbb{P}(X = n).$$

Q2.1 On note $p_n = \mathbb{P}(X = n)$. Exprimer p_n en fonction de n.
En déduire la loi de la variable aléatoire X.

Q2.2 Justifier que la variable aléatoire X possède une espérance et une variance et les calculer.
On pourra admettre que si $q \in]-1,1[$, alors $\sum nq^{n-1}$ converge et que $\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$, et que $\sum n(n-1)q^{n-2}$ converge aussi et que $\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$.

Correction :

Q1. **Q1.1** Montrons par récurrence double sur $k \in \mathbb{N}$ que $M^k \in F$.
Initialisation : par construction de F on a $M^0 = I_n$ et $M^1 = M$ dans F (et même M^2), ainsi la propriété est vrai au rang 0 et 1.
Hérédité : on suppose la propriété au rang k et $k-1$ pour un certain $k \in \mathbb{N}^\star$, ie on suppose $M^k \in F$ et $M^{k-1} \in F$.
On a $M^{k+1} = M^2M^{k-1} = (\frac{3}{2}M - \frac{1}{2}I_n)M^{k-1} = \frac{3}{2}M^k - \frac{1}{2}M^{k-1} \in F$ (par hypothèse de récurrence et car F est un ev).
On a bien montré par récurrence que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k \in F$.
Comme M^2 est combinaison linéaire de M et de I_n, on en déduit que $F = \mathrm{Vect}(I_n, M)$. Montrons que (I_n, M) est une famille libre, procédons par l'absurde :
On suppose que M et I_n sont liés, comme $I_n \neq 0$, on aurait l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $M = \lambda I_n$.

En injectant dans le relation vérifiée par M on en déduit que $2\lambda^2 I_n = 3\lambda I_n - I_n$, ainsi $(2\lambda^2 - 3\lambda + 1)I_n = 0$, donc $2\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$, ce qui implique que $\lambda = 1$ ou $\lambda = \frac{1}{2}$, or ces deux possibilités sont exclus. Ainsi (I_n, M) est une famille libre, comme elle est génératrice de F, on a donc que $\boxed{(I_n, M) \text{ est une base de } F}$. En particulier $\boxed{\dim(F) = 2}$.

Remarque : On peut, dés le début, remarquer que M^2 est combinaison linéaire de M et de I_n et ainsi faire une récurrence simple.

Q1.2 Soit $(N, N') \in F^2$, il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $(\alpha', \beta') \in \mathbb{R}^2$ tels que $N = \alpha I_n + \beta M$ et $N' = \alpha' I_n + \beta' M$, on en déduit donc que $NN' = \alpha\alpha' I_n + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)M + \beta\beta' M^2 \in F$ (par définition initiale de F), ainsi $\boxed{F \text{ est stable par produit}}$.

Q1.3 Tout d'abord on remarque que A et B sont dans F, montrons maintenant que (A, B) est une famille libre. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\alpha A + \beta B = 0$, ainsi $\alpha(M - I_n) + \beta(M - \frac{1}{2}I_n) = 0$, ie $(\alpha + \beta)M + (-\alpha - \frac{1}{2}\beta)I_n = 0$, comme la famille (M, I_n) est libre, on en déduit que $\alpha + \beta = 0$ et $-\alpha - \frac{1}{2}\beta = 0$, donc $\alpha = \beta = 0$. La famille (A, B) est donc une famille libre de F, comme elle est constituée de deux vecteurs et comme F est de dimension 2, on en déduit que $\boxed{(A, B) \text{ est une base de } F}$.

On a $AB = (M - I_n)(M - \frac{1}{2}I_n) = M^2 - \frac{3}{2}M + \frac{1}{2}I_n$, ainsi $\boxed{AB = 0}$ de même $\boxed{BA = 0}$.

On a $A^2 = M^2 - 2M + I_n = \frac{3}{2}M - \frac{1}{2}I_n - 2M + I_n = \frac{-1}{2}M + \frac{1}{2}I_n$, ainsi $\boxed{A^2 = \frac{-1}{2}A}$.

On a $B^2 = M^2 - M + \frac{1}{4}I_n = \frac{3}{2}M - \frac{1}{2}I_n - M + \frac{1}{4}I_n = \frac{1}{2}M - \frac{1}{4}I_n$, ainsi $\boxed{B^2 = \frac{1}{2}B}$.

Q1.4 Soit $T \in F$, il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $T = \alpha A + \beta B$. Ainsi $T^2 = \alpha^2 A^2 + \alpha\beta AB + \beta\alpha BA + \beta^2 B = \frac{1}{2}(-\alpha^2 A + \beta^2 B)$. Or $M = -A + 2B$, ainsi on a l'équivalence (la deuxième c'est car (A, B) base de F) :

$$T^2 = M \iff \frac{1}{2}(-\alpha^2 A + \beta^2 B) = -A + 2B \iff \begin{cases} -\alpha^2/2 & = -1 \\ \beta^2/2 & = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha^2 & = 2 \\ \beta^2 & = 4 \end{cases}.$$

Ainsi $\boxed{\text{l'équation } T^2 = M \text{ possède 4 solutions : } \sqrt{2}A + 2B,\ \sqrt{2}A - 2B, -\sqrt{2}A + 2B \text{ et } -\sqrt{2}A - 2B}$.

Q2. Q2.1 On remarque tout de suite que (p_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, en effet pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $2p_{n+2} = 3p_{n+1} - p_n$.

Son équation caractéristique $2r^2 - 3r + 1 = 0$ admet deux racines 1 et $\frac{1}{2}$. Ainsi il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $p_n = \frac{\alpha}{2^n} + \beta$.

Comme on sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_n = 1$ (X est une variable aléatoire), et comme on sait que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$, on en déduit que $\alpha = 2$ et $\beta = 0$.

On a donc montré : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2^{n+1}}}$.

Q2.2 Avec le rajout (série géométrique dérivée), on a tout de suite que $\sum n\mathbb{P}(X = n)$ converge absolument et $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{4}\frac{1}{(1 - 1/2)^2} = 1$. Ainsi $\boxed{X \text{ est d'espérance finie et } \mathbb{E}(X) = 1}$.

On en déduit aussi tout de suite que $\sum n(n-1)\mathbb{P}(X = n)$ converge absolument et $\mathbb{E}(X(X-1)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{8}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\frac{1}{2^{k-2}} = \frac{1}{8}\frac{2}{(1 - 1/2)^3} = 2$.

Ainsi X^2 est d'espérance finie et $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) = 3$. On en conclut ensuite que $\boxed{X \text{ possède une variance}}$, la formule de Koenig-Huygens donne $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 3 - 1$, ainsi $\boxed{\mathbb{V}(X) = 2}$.